«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по УМР

_________________ А.С. БОРЗОВА

«_________»_________________2016 г.

Методическое пособие

для учителей, работающих в инженерных классах
по дополнительной профессиональной программе «Основы современной инженерии: Язык современного инженера»

Москва 2016

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры
Высшей Математики МГТУ ГА 13.12 2016 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Множества, операции над множествами и их свойства

Основные понятия и обозначения

Множество – это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как одно целое. Объекты, входящие в состав множества называются его *элементами*. Обозначаются множества заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$.

Если a является элементом множества A, то этот факт записывается в виде:

$a \in A$ – a принадлежит множеству A;

$A \ni a$ – множество A содержит элемент a.

Если a не является элементом A, в этом случае пишут:

$a \notin A$ – a не принадлежит множеству A;

Существует несколько способов описать множество:

– перечислением: $A=\{2,4,6,10\}$:
– словесно: «Множество книг в библиотеке»;
– заданием свойства: $A=\{x|x$ – четные числа$\}$ или $A=\{x|x = 2n\}$

Два множества A и B называются *равными* и пишут $A=B$, если A и B содержат одни и те же элементы.

Пример.

а) $A=\{2,4,6,10\}$, $B=\{4,10,6,2\}$, $A=B$;

б) $A=\{2,4,6,10\}$, $B=\{4,10,6,2,1\}$, $A\neq B$.

При сравнении двух множеств порядок элементов значения не имеет.

Множество A называют *подмножеством* множества B, если каждый элемент A принадлежит множеству B. Это обозначается так:

$A\subset B$ – множество A является подмножеством множества B;

$A\subseteq B$ – A содержится в B или равно B.

Если $A\subset B$, но $A\neq\varnothing$, и $A\neq B$, то A называется *собственным подмножеством* B.

Пример. $A=\{2,4,8,10\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{2,4,9\}$, $D=\varnothing$, $E=\{2,4,8,10\}$. B, D, E – подмножества множества A: $B\subset A$, $D\subset A$, $E\subseteq A$; B – собственное подмножество множества A: $B\subset A$; C – не является подмножеством множества А: $C\not\subset A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Пустое множество является подмножеством любого множества. Обозначается знаком $\varnothing$.

Пример. Пустыми множествами являются:

а) множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$;

б) множество треугольников на плоскости, сумма углов которых отлична от 180°.

Классификация множеств

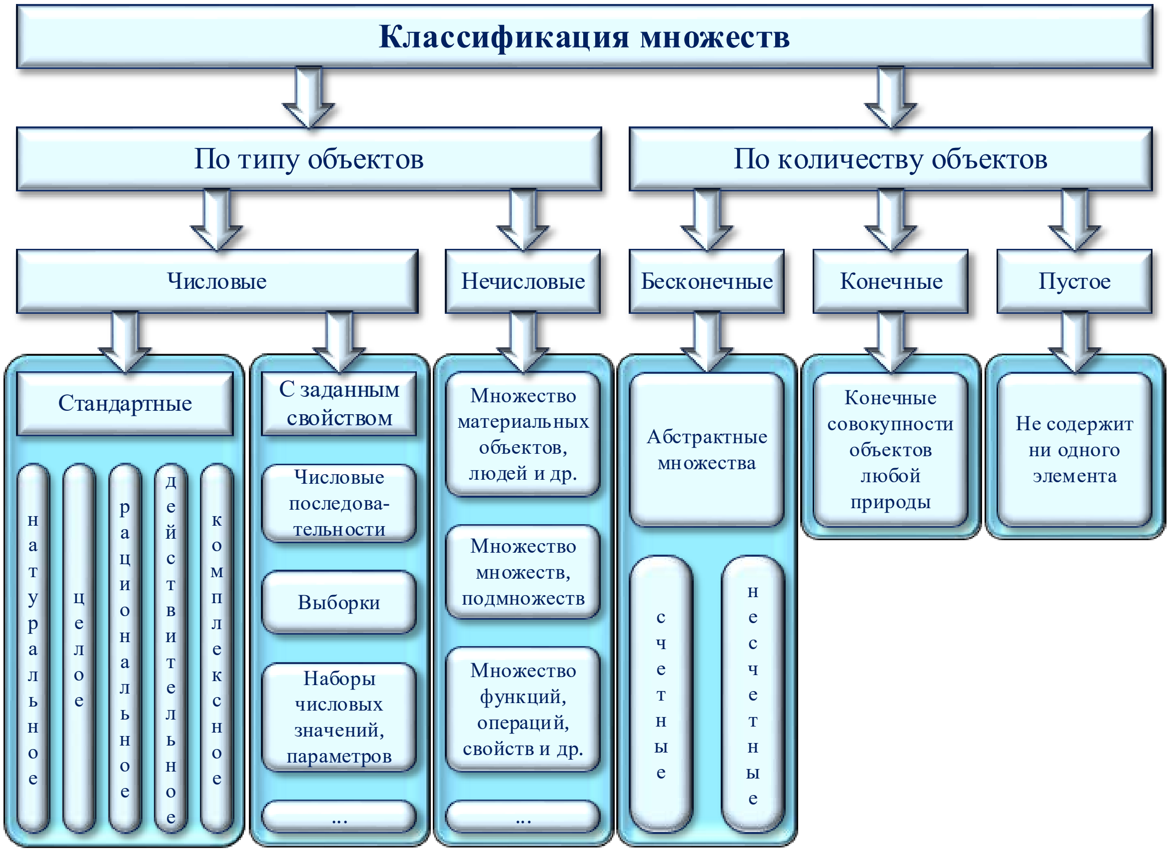


Рис. 1.

Графическое изображение множеств

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Диаграммы Эйлера–Венна делают наглядными различные утверждения, касающиеся множеств.

Пример. Пусть множество A – множество всех прямоугольников, а множество B – множество всех квадратов. Тогда эти множества можно изобразить кругами на плоскости, где множество B будет целиком лежать внутри множества A, т.к. B является собственным подмножеством A (см. рис.2).

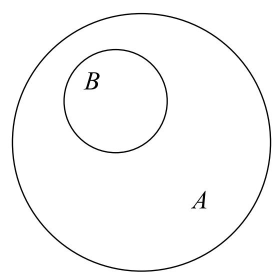


Рис. 2

Операции над множествами

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B (рис. 3):

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (рис. 4):

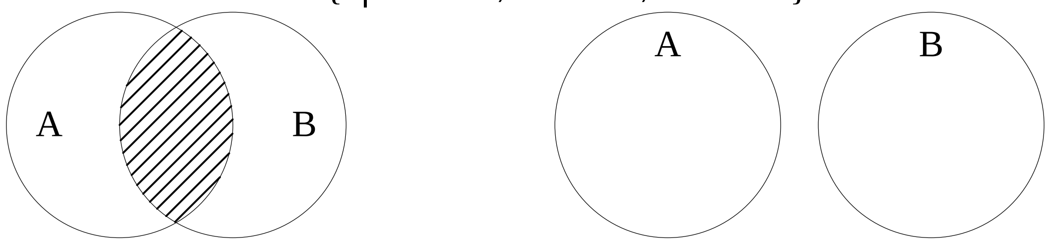
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, элементами которого являются элементы множества A не принадлежащие множеству B (рис. 5):

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, содержащее элементы множества A, элементы множества B, но не содержащее элементы множества $A \cap B$ (их пересечения) (рис. 6):

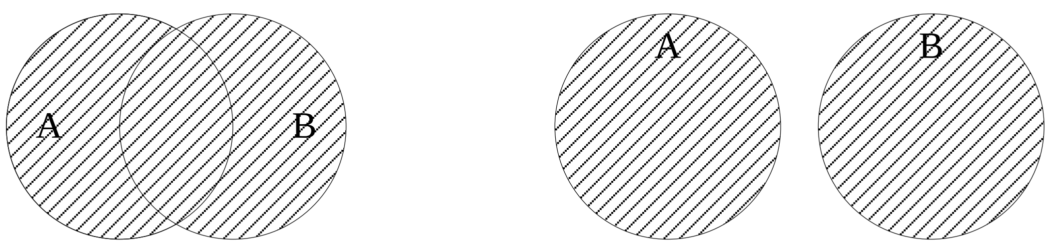
$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \text{ или } x \notin A \text{ и } x \in B\}.$$



а) $A \cap B$; б) $A \cap B = \varnothing$;

в) $A = B$, $A \cap B = A$, $A \cap B = B$; г) $A \subset B$, $A \cap B = A$.

Рис. 3. Пересечение множеств A и B



а) $A \cup B$; б) $A \cup B$;

в) $A = B$, $A \cup B = A$, $A \cup B = B$; г) $A \subset B$, $A \cup B = B$.

Рис. 4. Объединение множеств A и B

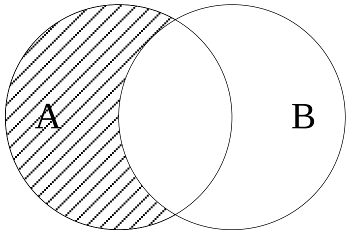


Рис. 5. Разность множеств A и B: $A \setminus B$

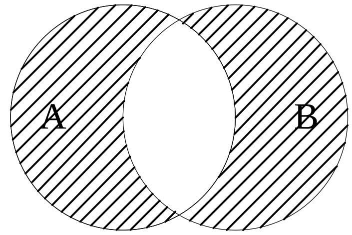


Рис. 6. Симметрическая разность множеств A и B: $A \Delta B$

Основные свойства операций над множествами

1. $A \cup A = A$ – идемпотентность объединения.
2. $A \cap A = A$ – идемпотентность пересечения.
3. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения.
4. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность объединения.
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – ассоциативность пересечения.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения.

Пример.

Для множеств $A=\{x|x$ – четные числа$\}$, $B=\{y|y$ – нечетные числа$\}$, $C=\{0\}$, $D=\{z|z$ – отрицательные целые числа$\}$: $A \cup B = Z \setminus D \setminus C = N$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B \cup C \cup D = Z$.

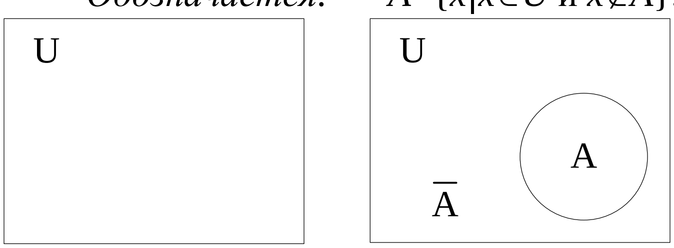
Универсальное множество

Универсальным множеством называется такое множество, что все остальные множества будут являться его подмножеством (рис. 7а).

Обозначается: U.

Если $A \subseteq U$, то множество всех элементов U, которые не принадлежат A, называется *дополнением* множества A (рис. 7б).

Обозначается: $\overline{A}=\{x|x \in U$ и $x \notin A\}$.



а) множество U б) дополнение к A

Рис. 7. Универсальное множество

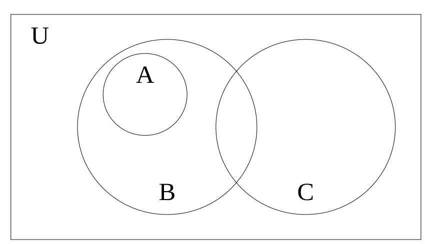


Рис. 8. Соотношение множеств треугольников на плоскости

Свойства дополнений

1. $\overline{A} = U \setminus A$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.

3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пример.

Пусть U – множество всех треугольников на плоскости, A – множество всех правильных треугольников; B – множество всех равнобедренных треугольников; C – множество всех прямоугольных треугольников.

Решение:

1) так как множество U – множество всех треугольников, то примем его за универсальное; множество U содержит все треугольники, в частности, и правильные, и равнобедренные, и прямоугольные, т.е. множества A, B, C будут располагаться внутри множества U;

2) все правильные треугольники – равнобедренные, поэтому $A \subset B$ (A – собственное подмножество B), т.е. множество A будет содержаться во множестве B;

3) так как равнобедренный треугольник может быть прямоугольным (угол между равными сторонами прямой), а прямоугольный может быть равнобедренным (два катета равны), то множества B и C будут пересекаться;

4) у правильного треугольника все углы равны 60°, поэтому он не может быть прямоугольным, и, наоборот, прямоугольный треугольник не может быть правильным, поэтому множества A и C пересекаться не будут.

Соотношения между всеми данными множествами представлены на рис. 8.

Применение диаграмм Эйлера-Венна к логическим рассуждениям

Пример. Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 25 – в футбол, 21 – в теннис.

Решение (рис. 9):

$n(Ф)=25$;

$n(T)=21$;

$n(Ф \cap T)=18$;

$n(Ф \cup T)=?$

$n(Ф \cup T)=n(Ф)+n(T)-n(Ф \cap T)=25+21-18=28$.

Ответ: в команде 28 человек.

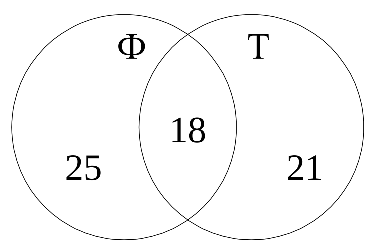


Рис. 9.

Пример. В классе 30 учеников. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4», «3». Число учеников, имеющих оценку «5» – 12, «4» – 14, «3» – 16, трое учеников успевают лишь на «5» и на «3», трое – на «5» и «4», четверо – на «4» и «3». Сколько человек одновременно имеют оценки «5», «4», «3»?

Решение (рис. 10):

$n(U)=30$;

$n(«5»\cup«4»\cup«3»)=28$;

$n(«5»)=12$;

$n(«4»)=14$;

$n(«3»)=16$;

$n(«5»\cup«3»\setminus«4»)=3$;

$n(«5»\cup«4»\setminus«3»)=3$;

$n(«4»\cup«3»\setminus«5»)=4$;

$n(«5»\cap«4»\cap«3»)=?$

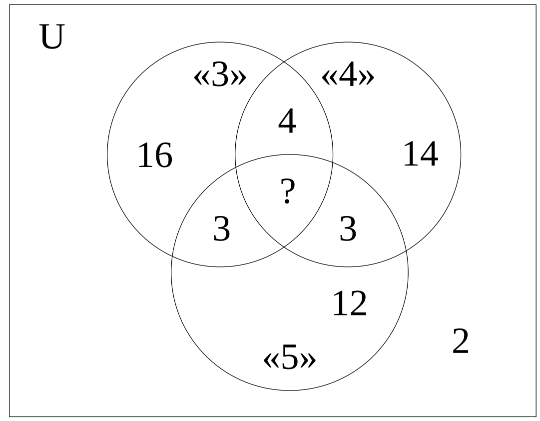


Рис. 10.

Пусть x человек одновременно имеют оценки «5», «4», «3», тогда:

$30=12+14+16-4-3-3-2x+2 \Rightarrow x=2$.

Ответ: 2 человека одновременно имеют оценки «5», «4», «3».

1.2. Конечные и бесконечные множества. Мощности множеств

Стандартные числовые множества

В связи с потребностью счета предметов, еще в доисторические времена, возникло явление *натурального* числа: 1, 2, 3, …. Таким образом, числа, которыми пользуются при счете предметов, называются *натуральными* числами и обозначаются *N*.

Натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, …

Замечание: 0 не является натуральным числом!

С развитием натурального ряда как результата счета предметов в обиход включаются арифметические действия над числами: сложение и вычитание.

Заметим, что сложение натуральных чисел приводит снова к натуральному числу: 2+3=5, 7+8=15…. Впоследствии потребность складывать породила и необходимость вычитать. Но, оказалось, что не всегда вычитание двух натуральных чисел приводит снова к натуральному числу. Если 3-2=1 – натуральное, то 2-3=? Зная только числа, используемые при счете предметов – невозможно определить результат этого действия. Так были введены в обиход отрицательные числа и ноль. Все натуральные числа, ноль и все натуральные числа с отрицательными знаками в совокупности образуют множество *целых* чисел и обозначаются *Z*.

Целый ряд чисел: …, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ….

Усложнение хозяйственной деятельности человека привело к появлению операций умножения и деления. Ситуация повторилась. Умножение целых чисел дает снова целое число: 2∗3=6. Обратная же операция – деление – не всегда позволяет оставаться во множестве целых чисел: 9:3=3, но 9:5=? Эта проблема привела к созданию дробных чисел ($\frac{p}{q}, p,q \in Z$), которые в совокупности с целыми, образовали множество *рациональных* чисел, которое обозначается буквой *Q*.

Рациональные числа: –2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{5}{17}$ и др.

Дальнейшее развитие математического знания повлекло за собой введение алгебраической операции – возведения в целую степень: $2^3=8$. И, снова, обратные операции – извлечение корня (из неотрицательного числа) и вычисление логарифма – дают числа, далеко не все из которых, являются рациональными. Так появились *иррациональные* числа – числа, не соизмеримые с единицей масштаба (обозначаются буквой *I*). Такие числа называются алгебраическими.

Иррациональные числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{17}$, π, e и т.п.

Замечание: числа $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$ и т.п. не являются иррациональными, т.к. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$.

Однако в геометрии и математическом анализе тоже возникали новые числа, например, π или *e* – это иррациональные числа, но алгебраическими они не являются, их называют трансцендентными числами. О них речь пойдет ниже. Таким образом, совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образовала множество *действительных* чисел, их обозначение *R*.

Действительные числа: 1, 2, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, π и др.

Оставалась одна проблема – извлечение четного корня из отрицательного числа: $\sqrt{-4}$. Результат этого действия не мог быть выражен действительным числом. Поэтому появилась необходимость в еще одном расширении множества всех чисел. Числа, получающиеся таким образом, называются мнимыми и, предполагается, что $\sqrt{-1}=i$, где i – мнимая единица. Сумма любого действительного и мнимого числа называется комплексным числом: $2+3i$, а совокупность всех таких чисел и всех действительных чисел образует множество *комплексных* чисел – множество *C*.

Заметим, что каждое последующее множество является расширением предыдущего, т.е. содержит предыдущее множество: целое множество включает в себя натуральное, в свою очередь, рациональное множество содержит в себе все целые, а значит и натуральные и т.д. (рис.11). Все числовые множества являются бесконечными.

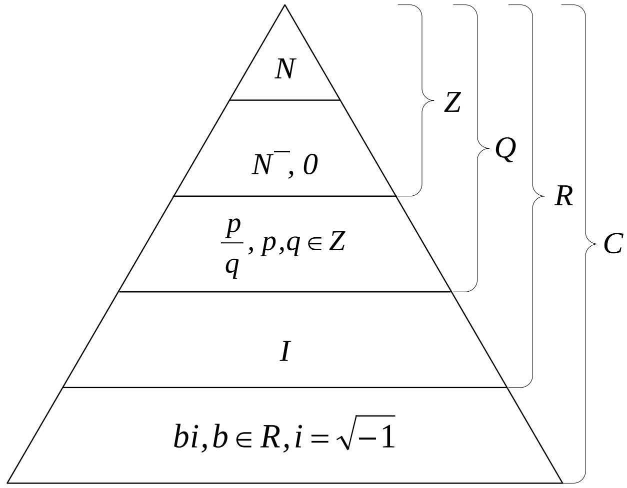


Рис.11.

Мощность множеств

Количество элементов множества называется его *мощностью* и обозначается $n(A)$.

Пример.

а) $A=\{2,4,6,10\}$, $n(A)=4$;

б) $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ – множество чётных чисел от 1 до 15, $n(A)=7$.

Два множества называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого. Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое число элементов, но это определение имеет смысл и для бесконечных множеств.

Множество натуральных чисел выполняет функцию счета, иными словами натуральными числами мы считаем (вот почему 0 не является натуральным числом, любой счет всегда начинается с единицы), именно поэтому его мощность называется *счетной* мощностью. Какую же мощность имеет целое множество? С одной стороны, оно, как и натуральное множество, имеет бесконечное количество элементов, с другой стороны, оно содержит в себе все натуральные числа и элементы кроме этого. По определению равномощности, если можно найти такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу натурального ряда соответствует ровно один элемент целого ряда, то это будет свидетельствовать о счетности целого множества. Процесс создания такого соответствия равносилен процессу счета, т.е. зададимся вопросом: можем ли мы считать целые числа (не **по**считать, а именно считать, нужен не результат, а процесс)? Это можно сделать, например, так:

Z:	…,	–3,	–2,	–1,	0,	1,	2,	3,	…,
N:	…	7	5	3	1	2	4	6	…

Таким образом, множество целых чисел счетно.

Теорема. (а) Подмножество счетного множества конечно или счетно.

(б) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

(в) Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Множество рациональных чисел тоже счетно. В самом деле, рациональные числа представляются несократимыми дробями с целым числителем и знаменателем. Множество дробей с данным знаменателем счетно, поэтому Q представимо в виде объединения счетного числа счетных множеств (теорема, (в)). Доказать счетность рационального множества можно и по определению, отыскав взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел. Это читателю предлагается сделать самостоятельно.

Множества иррациональных, действительных и комплексных чисел не являются счетными. Они имеют, так называемую, *мощность континуума*. Доказательства этих фактов мы здесь опускаем.

Таким образом, мощности множеств могут быть конечной, счетной или мощностью континуума.

Действительное множество на числовой прямой

Континуум (от лат. continuum – непрерывное) – непрерывная совокупность, в частности, совокупность всех точек прямой, эквивалентная совокупности всех действительных чисел.

Таким образом, числовая прямая отображает множество действительных чисел, где каждая точка числовой прямой есть изображение какого-либо действительного числа (рис.12). И, наоборот, любое действительное число можно найти на числовой оси.

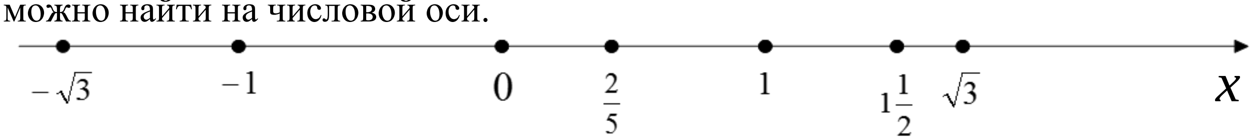
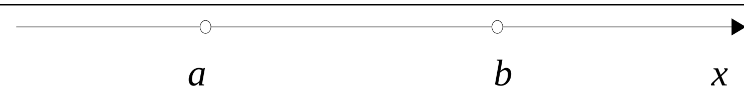
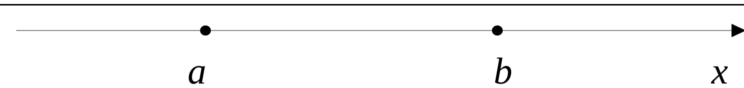
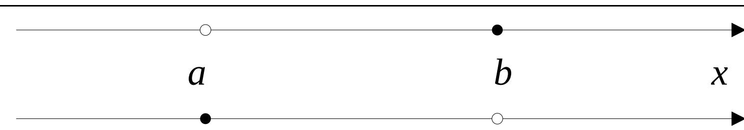


Рис.12.

Условные обозначения, принятые для описания точек и промежутков действительной оси, указаны в таблице 1.

Таблица 1. Условные обозначения

Знак	***Значение***	***Пример, чертеж***
$\in$	Принадлежит	$2 \in N, \frac{1}{2} \in Q, \sqrt{2} \in R$
$\notin$	Не принадлежит	$\sqrt{2} \notin Z, -2 \notin N$
(a,b)	Интервал (a, b не принадлежат интервалу)	
$[a,b]$	Отрезок (a, b принадлежат отрезку)	
$(a,b],[a,b)$	Полуинтервалы	

		a b x
$\bigcap$	Пересечение	$(a,b)\bigcap[c,d)$
$\bigcup$	Объединение	$(a,b]\bigcup[c,d]$

Пример. Пусть $A=[-1;1]$, $B=(-\infty;0)$, $C=[0;2)$. Найти множества:

а) $A\bigcup C$; б) $A\bigcap B$; в) $A\bigcup B\bigcup C$; г) $(A\bigcup B)\bigcap C$; д) $B\bigcap C$ и изобразить их на координатной прямой.

Решение:

а) $A\bigcup C=[-1;1]\bigcup[0;2)=[-1;2)$
Рис.13а.

б) $A\bigcap B=[-1;1]\bigcap(-\infty;0)=[-1;0)$
Рис.13б.

в) $A\bigcup B\bigcup C=$
$=[-1;1]\bigcup(-\infty;0)\bigcup[0;2)=(-\infty;2)$
Рис.13в.

г) $(A\bigcup B)\bigcap C=$
$=([-1;1]\bigcup(-\infty;0))\bigcap[0;2)=[0;1]$
Рис.13г.

д) $B\bigcap C=(-\infty;0)\bigcap[0;2)=\varnothing$
Рис.13д.

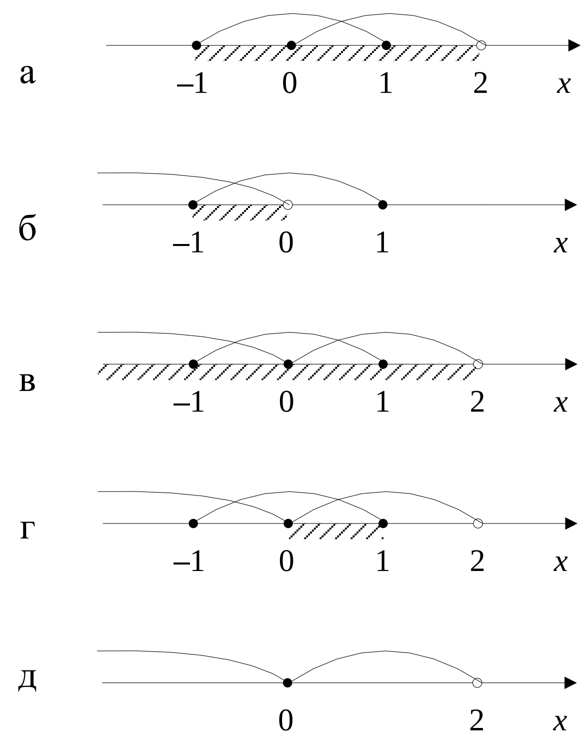


Рис.13.

1.3. Высказывания и операции над ними. Таблицы истинности

Высказывания

Математическая логика – это наука о логических выводах и рассуждениях. Любая теорема или формула какого-либо раздела математики формулируется и доказывается по её законам. Одним из центральных объектов логики является понятие высказывания.

Высказыванием называется всякое повествовательное предложение, относительно которого можно говорить истинно оно или ложно.

Обозначаются латинскими буквами: *A*, *B*, *C*, …, *X*, *Y*, *Z*, *a*, *b*, *c*, …, *x*, *y*, *z*.

Пример.

а) «Москва – столица России» – высказывание истинно;

б) «Москва – столица Франции» – высказывание ложно;

в) «Ура!» – не является высказыванием;

г) «Завтра будет суббота» – высказывание, истинное только в пятницу, в другие дни недели – ложно;

д) «Который час?» – не является высказыванием;

е) «$2\cdot2=4$» – высказывание истинно.

Истинностные значения высказываний обозначаются цифрами: 0 – ложно, 1 – истинно.

Операции над высказываниями

Пусть A и B – произвольные высказывания, истинность которых необязательно известна.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, которое принимает значение 1 тогда и только тогда, когда A принимает 0; и принимает значение 0 в обратном случае.

Обозначается: $\overline{A}$ или $\neg A$ (читается: «не A»).

Пример.

а) A=«3 – простое число» – высказывание истинно;

б) $\overline{A}$ =«3 – не является простым числом» – высказывание ложно.

Замечание. Часто наряду с операцией отрицания высказывания вводят операцию «отрицание отрицания» и обозначают: $\overline{\overline{A}}$. Истинностные значения высказывания $\overline{\overline{A}}$ такие же, как и у высказывания A, т.е. $\overline{\overline{A}} = A$.

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно только тогда, когда оба высказывания истинны.

Обозначается: $A \wedge B$ или $A\&B$ или AB или $A\cdot B$ (читается: «A и B»).

Пример.

а) D=«У ромба диагонали пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам»; это высказывание состоит из двух частей:

A=«У ромба диагонали пересекаются под прямым углом»,

B=«Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам»;

т.к. высказывания A и B соединяет союз «и», т.е. выполняется операция конъюнкции, то высказывание D примет вид: $A \wedge B$. Так как оба высказывания A и B истинны, то по определению конъюнкции высказывание $D = A \wedge B$ также истинно;

б) C=«Число 2 – чётное и отрицательное»:

A=«2 – чётное» – высказывание истинно,

B=«2 – отрицательное» – высказывание ложно,

$C = A \wedge B$ – по определению конъюнкции высказывание ложно.

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое принимает значение 1, тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний принимает значение 1.

Обозначается: $A \vee B$ (читается: «A или B»).

Пример.

M=«Трапеция – это четырёхугольник или треугольник»:

A=«Трапеция – четырёхугольник» – высказывание истинно,

B=«Трапеция – треугольник» – высказывание ложно,

$M=A\vee B$ – по определению дизъюнкции высказывание истинно.

Импликацией высказываний A и B называется высказывание, которое принимает значение 0 тогда и только тогда, когда A принимает значение 1, а B – 0. При этом A называется *посылкой*, B – *следствием*.

Обозначается: $A\to B$ или $A\Rightarrow B$ (читается: «если A, то B»; «из A следует B»; «A влечёт B»).

Пример.

Рассмотрим высказывание:

а) S=«Если Волга впадает в Средиземное море, то выходной день - воскресенье»:

A=«Волга впадает в Средиземное море» – высказывание ложно,

B=«Выходной – воскресенье» – высказывание истинно;

высказывание $S=A\to B$ по определению импликации истинно.

б) классический пример:

L=«Если 2+2=5, то есть ведьмы»,

A=«2+2=5» – высказывание ложно,

B=«Есть ведьмы» – высказывание ложно; но по определению импликации высказывание $L=A\to B$ истинно.

Замечание. Приведённые высказывания, с точки зрения здравого смысла, являются бессмысленными, однако они истинны, т.к. и в том, и в другом случае посылки были ложными. В математической логике такие высказывания называют: «из ложного что угодно».

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, которое принимает значение 1, тогда и только тогда, когда A и B принимают одинаковые значения.

Обозначается: $A\leftrightarrow B$ или $A\sim B$ или $A\Leftrightarrow B$ (читается: «A тогда и только тогда, когда B»).

Пример.

Q=«Число 129 делится на 3 в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на 3»:

A=«Число 129 делится на 3» – высказывание истинно,

B=«Сумма цифр числа 129 делится на 3» – высказывание истинно;

$Q=A\leftrightarrow B$ – по определению эквиваленции высказывание истинное.

Дизъюнкцией в исключающем смысле или *логической суммой* называется высказывание, которое принимает значение 1 тогда и только тогда, когда значение 1 принимает одно и только одно из высказываний A и B.

Обозначается: $A\vee\vee B$ или $A+B$ или $A\oplus B$ (читается: «или A или B»).

Таблица 2. Таблица истинности

Варианты обозначения	A	B	$\neg A$ $\overline{A}$ not$A$	$A \wedge B$ $A \cdot B$ AB $A \& B$ $A$and$B$	$A \vee B$ Aor$B$	$A \rightarrow B$ $A \Rightarrow B$ $A \supset B$	$A \sim B$ $A \Leftrightarrow B$ $A \leftrightarrow B$ $A \equiv B$	$A+B$ $A \oplus B$ $A \vee\vee B$ $A \Delta B$	$A \downarrow B$ $\neg(A \vee B)$	$A \mid B$ $\neg(A \wedge B)$
Название логической операции			отрицание	конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция	дизъюнкция в исключающем смысле, сумма, сумма по модулю 2	стрелка Пирса	штрих Шеффера
Истинностные значения	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Приоритет операций

Действия над высказываниями выполняются в следующей последовательности:

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \sim \qquad +$$

Пример. Выяснить истинно или ложно высказывание:

а) $(3<8)\wedge(8<11)$; б) $(3>8)\vee(8<11)$; в) $(3<8)\rightarrow(8<11)$; г) $(3<8)\leftrightarrow(8>11)$.

Решение:

а) высказывание $(3<8)$ истинно, высказывание $(8<11)$ истинно, из таблицы истинности следует, что данное высказывание истинно:

$$\underset{1}{(3<8)} \underset{1}{\wedge} \underset{1}{(8<11)};$$

для высказываний б), в), г) рассуждения проводятся аналогично:

б) $$\underset{0}{(3>8)} \underset{1}{\vee} \underset{1}{(8<11)};$$

в) $$\underset{1}{(3<8)} \underset{1}{\rightarrow} \underset{1}{(8<11)};$$

г) $$\underset{1}{(3<8)} \underset{0}{\leftrightarrow} \underset{0}{(8>11)}.$$

Пример.

По данному словесному высказыванию записать формулу и определить ее истинностное значение:

«Москва – столица России или Санкт-Петербург – столица России».

Решение:

A=«Москва – столица России»;

B=«Санкт-Петербург – столица России».

Из соображений здравого смысла получим: A=1, B=0. Тогда данное высказывание можно записать следующим образом: $A \vee B$. При таких истинностных значениях переменных дизъюнкция принимает значение 1, т.е. исходное высказывание истинно:

$$\begin{array}{ccc} A & \vee & B. \\ 1 & ① & 0 \end{array}$$

Формулы логики

Высказывания, значения истинности которых не заданы, называются *переменными* высказываниями. Высказывания, значения истинности которых известны, называются *постоянными*.

Сложное высказывание, образуемое из постоянных или переменных высказываний с помощью логических операций, называется *формулой логики* или *пропозициональной формулой*.

Истинностное значение формулы логики зависит от того, какие значения принимают входящие в эту формулу высказывания.

Пример.

$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ – формула логики.

Часть формулы, которая сама по себе является формулой, называется *подформулой*.

Виды формул логики

Формула логики называется *тождественно истинной* или *законом логики*, или *тавтологией*, если она принимает значение 1 при любом наборе истинностных значений логических переменных, входящих в эту формулу.

Формула логики называется *тождественно ложной*, если она принимает значение 0 при любом наборе истинностных значений логических переменных, входящих в эту формулу.

Формула логики называется *выполнимой*, если она принимает значение 1 хотя бы при одном наборе истинностных значений логических переменных, входящих в эту формулу.

Формула логики называется *опровержимой* если она принимает значение 0 хотя бы при одном наборе истинностных значений логических переменных, входящих в эту формулу.

Вид формулы логики определяется с помощью *метода истинностных таблиц*.

Пример.

Определить вид формул логики:

а) $(A \vee B) \vee (\overline{A} \sim \overline{B})$; б) $S \leftrightarrow P \rightarrow (P \vee S)$; в) $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$.

Решение:

а) *Шаг 1*. Определим порядок действий:

① ③ ②

$$(A \vee B) \vee (\neg A \sim \neg B).$$

Шаг 2. Придадим переменным A и B всевозможные значения 0 и 1:

$(A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\sim$	$\neg B).$
0		**0**				
0		**1**				
1		**0**				
1		**1**				

Шаг 3. Тогда переменные $\neg A$ и $\neg B$ будут иметь противоположные значения:

$(A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\sim$	$\neg B).$
0		0		**1**		**1**
0		1		**1**		**0**
1		0		**0**		**1**
1		1		**0**		**0**

Шаг 4. По таблице истинности определим значения выражений в скобках – дизъюнкции и эквиваленции:

$(A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\sim$	$\neg B).$
0	**0**	0		1	**1**	1
0	**1**	1		1	**0**	0
1	**1**	0		0	**0**	1
1	**1**	1		0	**1**	0

Шаг 5. Определим значения последней операции – дизъюнкции – по результатам предыдущего шага:

$(A$	$\vee$	$B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\sim$	$\neg B).$
0	0	0	**1**	1	1	1
0	1	1	**1**	1	0	0
1	1	0	**1**	0	0	1
1	1	1	**1**	0	1	0

Вывод: т.к. при всех значениях переменных A и B истинностные значения данной формулы равны 1, то формула является тождественно истинной.

б) $S \leftrightarrow P \rightarrow (P \vee S);$

	③		②		①	
S	$\leftrightarrow$	P	$\rightarrow$	$(P$	$\vee$	$S);$
0	**0**	0	1	0	0	0
0	**0**	1	1	1	1	0
1	**1**	0	1	0	1	1
1	**1**	1	1	1	1	1

Вывод: формула является выполнимой, т.к. она может принимать значения 0 и 1.

в) $\neg (P \rightarrow (Q \rightarrow P));$

③		②		①	
$\neg$	$(P$	$\rightarrow$	$(Q$	$\rightarrow$	$P));$
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1

Вывод: формула является тождественно ложной, т.к. она принимает значение 0 при любом наборе истинностных значений логических переменных, входящих в эту формулу.

Две формулы логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые истинностные значения при одних и тех же наборах истинностных значений логических переменных, входящих в эти формулы.

Обозначается: $A \equiv B$.

Пример. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{B} \wedge \overline{A}$.

Основные равносильности (законы логики) представлены в таблице 2. С помощью законов логики можно упрощать формулы логики, доказывать тождества.

Пример.

Доказать тождество: $(\overline{A} \sim B)+(A \wedge B)=A \vee B$

а) методом истинностных таблиц; б) методом равносильности.

Решение:

а) Определим истинностные значения каждой из формул:

$(\neg A$	$\sim$	$B)$	$+$	$(A$	$\wedge$	$B)$;	A	$\vee$	B.
1	0	0	**0**		0	0	0	**0**	0
1	1	1	**1**	0	0	1	0	**1**	1
0	1	0	**1**	1	0	0	1	**1**	0
0	0	1	**1**	1	1	1	1	**1**	1

Истинностные значения обеих формул одинаковы при одних и тех же значениях входящих переменных. Значит выражения левой и правой частей тождества равны. Таким образом, тождество доказано.

б) Преобразуем левую часть тождества с помощью основных равносильностей:

$$(\overline{A} \sim B)+AB= \Big|\ \text{используем формулу: } a \sim b = ab \vee \overline{a}\overline{b}\ \Big| =(\overline{A}B \vee A\overline{B})+AB=$$

$$= \Big|\ \text{используем формулу: } a+b=a\overline{b} \vee \overline{a}b\ \Big| =(\overline{A}B \vee A\overline{B})(\ \overline{AB}) \vee (\overline{\overline{A}B \vee A\overline{B}})AB=$$

$$= \Big|\ \text{используем законы де Моргана и свойство дистрибутивности}\ \Big| =$$

$$=(\overline{A}B \vee A\overline{B})(\ \overline{A} \vee \overline{B}) \vee\ (\overline{\overline{A}B}\ \overline{A\overline{B}})AB=\overline{A}B\overline{A} \vee A\overline{B}\,\overline{A} \vee \overline{A}B\overline{B} \vee A\overline{B}\,\overline{B} \vee\ (A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B)AB=$$

$$= \Big|\ \text{используем свойства: } a \cdot \overline{a}=0,\ a \cdot a=a,\ a \vee \overline{a}=1,\ a \vee a=a\ \Big| =\overline{A}B \vee A\overline{B} \vee AB=\overline{A}B \vee A(\overline{B} \vee B)=$$

$$=\overline{A}B \vee A= \Big|\ \text{используем формулу: } a \vee bc=(a \vee b)(a \vee c)\ \Big| =(\ \overline{A} \vee A)(A \vee B)=A \vee B.$$

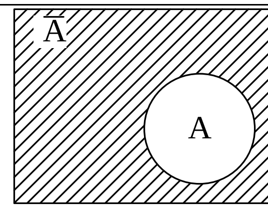
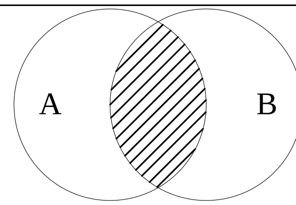
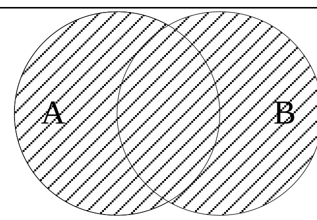
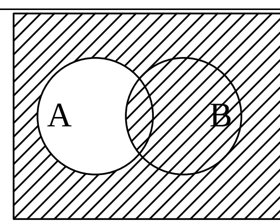
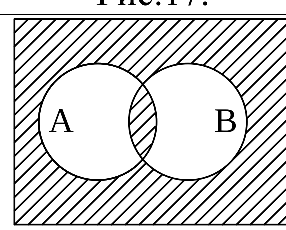
Таблица 3. Законы логики

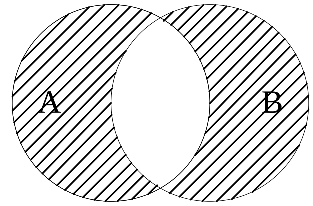
Свойства конъюнкции	1.	$a\cdot 0=0.$	Законы 0 и 1
	2.	$a\cdot 1=a.$	
	3.	$a\cdot a=a.$	Идемпотентность
	4.	$a\cdot b=b\cdot a.$	Коммутативность
	5.	$a(b\cdot c)=(a\cdot b)c.$	Ассоциативность
Свойства дизъюнкции	6.	$a\vee 0=a.$	Законы 0 и 1
	7.	$a\vee 1=1.$	
	8.	$a\vee a=a.$	Идемпотентность
	9.	$a\vee b=b\vee a.$	Коммутативность
	10.	$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c.$	Ассоциативность
Свойства конъюнкции и дизъюнкции	11.	$a(b\vee c)=ab\vee ac.$	Дистрибутивность
	12.	$a\vee b\cdot c=(a\vee b)(a\vee c).$	
Свойства отрицания	13.	$a\cdot\bar{a}=0.$	Закон противоречия
	14.	$a\vee\bar{a}=1.$	Закон исключенного третьего
	15.	$\bar{\bar{a}}=a.$	Закон двойного отрицания
Законы де Моргана	16.	$\overline{a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n}=\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2\cdot\ldots\cdot\bar{a}_n.$	
	17.	$\overline{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=\bar{a}_1\vee\bar{a}_2\vee\ldots\vee\bar{a}_n.$	
	18.	$a\vee b=\overline{\bar{a}\bar{b}}.$	
	19.	$ab=\overline{\bar{a}\vee\bar{b}}.$	
Свойства импликации	20.	$0\to a=1.$	Законы 0 и 1
	21.	$a\to 0=\bar{a}.$	
	22.	$a\to 1=1.$	
	23.	$1\to a=a.$	
	24.	$a\to a=1.$	
	25.	$\bar{b}\to\bar{a}=a\to b.$	
	26.	$a\to b=\bar{a}\vee b.$	Правило исключения импликации
Свойства эквиваленции	27.	$a\sim a=1.$	
	28.	$a\sim b=b\sim a.$	Коммутативность
	29.	$a\sim(b\sim c)=(a\sim b)\sim c.$	Ассоциативность
	30.	$a\sim b=(a\to b)(b\to a).$	
	31.	$a\sim b=ab\vee\bar{a}\bar{b}.$	Правила исключения эквиваленции
	32.	$\overline{a\sim b}=a\bar{b}\vee\bar{a}b.$	
Свойства суммы	33.	$a+a=0.$	
	34.	$a+0=a.$	
	35.	$\bar{a}=a+1.$	
	36.	$a+b=b+a.$	Коммутативность
	37.	$a+(b+c)=(a+b)+c.$	Ассоциативность
	38.	$a(b+c)=ab+ac.$	Дистрибутивность
	39.	$a\sim b=\overline{a+b}.$	
	40.	$a+b=a\bar{b}\vee\bar{a}b.$	Правило исключения суммы
Правило склеивания	41.	$ab\vee a\bar{b}=a.$	
Правило образования союза	42.	$ab\vee\bar{a}c=ab\vee\bar{a}c\vee bc.$	
Правило поглощения	43.	$a\vee ab=a.$	

1.4. Связь логических связок с операциями на множествах

Смысл логических операций становится более очевидным, если провести параллель между ними и операции над множествами, а те, в свою очередь, проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера-Венна (таблица 4).

Таблица 4. Связь логических операций с операциями над множествами

Логическая операция	***Операция над множествами***	***Графическое изображение***
Отрицание $\overline{A}$	Дополнение $\overline{A}$	 Рис.14.
Конъюнкция $A \wedge B$	Пересечение $A \cap B$	 Рис.15.
Дизъюнкция $A \vee B$	Объединение $A \cup B$	 Рис.16.
Импликация $A \to B$	Дополнение к разности $\overline{A \setminus B}$	 Рис.17.
Эквиваленция $A \leftrightarrow B$	Дополнение к симметрической разности $\overline{A \Delta B}$	 Рис.18.

Сумма $A+B$	Симметрическая разность $A \Delta B$	 Рис.19.

1.5. Кванторы, виды теорем

Кванторы

Кванторы – это символы, служащие для количественного описания высказываний.

$\forall$ – квантор всеобщности (образован от англ. any – любой, перевернутая буква А), читается «все», «всякий», «для любого», «для всякого» и т.п.;

$\exists$ – квантор существования (образован от англ. existence – существование, зеркальное отражение буквы Е), читается «некоторый», «найдется» «существует», «бывает», «иногда» и т.п.

С помощью кванторов удобно записывать логические предложения, как например: $\forall x\in Q\ \exists y\in N$, читается: «для любого x, принадлежащего множеству целых чисел, найдется такое натуральное число y».

Кванторы используются для краткой записи логических утверждений, теорем и др. математических предложений.

Логическое следование

Логическое следование – один из основных элементов логического вывода, предполагающий наличие истинной посылки и истинного следствия. Иными словами, говорят, что из высказывания A следует высказывание B, если всякий раз, когда A истинно, истинно и B. Логическое следование обозначается символом $\Rightarrow$. Высказывание $A\Rightarrow B$ можно прочитать по разному:

– если A, то B;
– B тогда, когда A;
– из A следует B;
– B следует из A (B есть следствие A);
– A – достаточное условие для B (для B достаточно A);
– B – необходимое условие для A (для A необходимо B).

Пример. «Если прямые перпендикулярны, то они пересекаются в одной точке». Здесь высказывание A – прямые перпендикулярны; высказывание B – пересекаются в одной точке. Тогда $A\Rightarrow B$ можно переформулировать следующим образом:

– «прямые пересекаются в одной точке, когда они перпендикулярны» (но не только!);
– «из перпендикулярности двух прямых следует одна точка их пересечения»;
– «точка пересечения прямых следует из их перпендикулярности» («точка пересечения прямых – следствие их перпендикулярности»);
– «перпендикулярность прямых – достаточное условия для существования одной точки их пересечения» («для того, чтобы прямые пересекались в одной точке достаточно их перпендикулярности», но не необходимо!);

– «пересечение прямых в точке – необходимое условие их перпендикулярности» («для перпендикулярности прямых необходимо их пересечение в точке», но не достаточно!).

Равносильность

Высказывания A и B называются *равносильными*, если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует высказывание A. Для обозначения равносильности используется символ $\Leftrightarrow$. Высказывание $A \Leftrightarrow B$ можно прочитать разными способами:

– A равносильно B;

– A тогда и только тогда, когда B;

– если A, то B, и, наоборот, если B, то A;

– из A следует B, из B следует A;

– A – необходимое и достаточное условие для B (для A необходимо и достаточно, чтобы B);

– B – необходимое и достаточное условие для A (для B необходимо и достаточно, чтобы A).

Пример. «Параллельность прямых равносильна отсутствию точек их пересечения». Здесь высказывание A – прямые параллельны, высказывание B – прямые не имеют точек пересечения. Тогда $A \Leftrightarrow B$ можно переформулировать следующим образом:

– «прямые параллельны тогда и только тогда, когда у них нет точек пересечения»;

– «если прямые параллельны, то они не имеют точек пересечения, и, наоборот, если прямые не имеют точек пересечения, то они параллельны»;

– «из параллельности прямых следует отсутствие их точек пересечения, из отсутствия точек пересечения прямых следует их параллельность»;

– «параллельность прямых – необходимое и достаточное условие отсутствия их точек пересечения» («для параллельности прямых необходимо и достаточно, чтобы они не имели точек пересечения»);

– «отсутствие точек пересечения – необходимое и достаточное условие их параллельности» («для отсутствия точек пересечения прямых, необходима и достаточна их параллельность»).

Виды теорем

Теорема – это высказывание (логическое следование), истинность которого устанавливается посредством доказательства. *Доказательство* представляет собой логическое следование цепочки высказываний от посылки теоремы к ее следствию.

Чаще всего теорема формулируется в виде «если A, то B». Такая формулировка называется *прямой* теоремой.

Для всякой прямой теоремы можно сформулировать *обратное* утверждение: «если B, то A», однако не всегда это высказывание будет верно, а значит не всегда будет являться теоремой.

Для всякой прямой теоремы можно сформулировать *противоположное* утверждение: «если не A, то не B», которое также не обязательно будет теоремой.

И, наконец, для всякой прямой теоремы можно сформулировать *обратно противоположное* утверждение: «если не B, то не A». Это высказывание всегда будет истинным, т.е. являться теоремой.

Таблица 5. Виды теорем

Прямая теорема «если A, то B» $A \Rightarrow B$	Обратная теорема «если B, то A» $B \Rightarrow A$
Противоположная теорема «если не A, то не B» $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	Обратно противоположная теорема «если не B, то не A» $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Таким образом, для любой верной теоремы будет верна и обратно противоположная к ней, на этом факте основано доказательство от противного: если необходимо доказать некоторый факт $A \Rightarrow B$, то для этого в качестве посылки берут отрицание B и, с помощью логического следования приходят к отрицанию A.

Теоремы обратная к данной и противоположная к данной не всегда бывают верными. Но, когда это случается, то обе теоремы могут быть записаны в единой формулировке, с использованием оборотов «тогда и только тогда, когда», «необходимо и достаточно».

1.6. Логические операции в среде Maple

В стадартной конфигурации Mapleимеются команды, необходимые для выполнения базовых действий булевой алгебры:

- Преобразования нормальных форм;

- Работа с многочленами;

- Упрощение булевых выражений;

- Заполнение таблиц истинности;

- Проверка выражения на тавтологичность;

- Проверка на противоречивость.

Ниже приведён сеанс работы со создаваемыми случайно булевыми выражениями.

> $restart;\ with(Logic);$

$$[\&and, \&iff, \&implies, \&nand, \&nor, \&not, \&or, \&xor, BooleanSimplify, Canonicalize, Contradiction, Dual, Environment, Equivalent, Export, Implies, Import, Normalize, Random, Satisfy, Tautology, TruthTable]$$

Генерация случайных булевых функций

> $a := Random([x, y], form = CNF)$

$$a := x \ \&\text{or}\ y$$

> $d := Random(\{x, y, z\}, form = MOD2)$

$$d := x\,y\,z + x\,y + x\,z + x + y\,z + y$$

> $c := Random([x, y, z], form = DNF)$

$$c := ((y \ \&\text{and}\ z)\ \&\text{and}\ \&not(x)\ \&\text{or}\ (y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{and}\ \&not(z))\ \&\text{or}\ (z\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{and}\ \&not(y)$$

> $b := Random(\{x, y\})$

$$b := ((x\ \&\text{and}\ y\ \&\text{or}\ x\ \&\text{and}\ \&not(y))\ \&\text{or}\ y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{or}\ \&not(x)\ \&\text{and}\ \&not(y)$$

Преобразование стандартного Maple к булевой форме и многочлену Жегалкина

> $Export(\text{`\&and`}(a, b, c)\ \&\text{or}\ b, form = boolean)$

$(x$ **or** $y)$ **and** $(x$ **and** y **or** x **and** **not** y **or** y **and** **not** x **or** **not** $(x$ **or** $y))$ **and** $(y$ **and** z **and** **not** x **or** y **and** **not** x **and** **not** z **or** z **and** **not** x **and** **not** $y)$ **or** x **and** y **or** x **and** **not** y **or** y **and** **not** x **or** **not** $(x$ **or** $y)$

> $Export((\text{`\&nor`}(a, b, c))\ \&\text{and}\ b, form = boolean)$

not $(x$ **or** y **or** x **and** y **or** x **and** **not** y **or** y **and** **not** x **or** **not** $(x$ **or** $y)$ **or** y **and** z **and** **not** x **or** y **and** **not** x **and** **not** z **or** z **and** **not** x **and** **not** $y)$ **and** $(x$ **and** y **or** x **and** **not** y **or** y **and** **not** x **or** **not** $(x$ **or** $y))$

> $Export(\,`\&not`(a)\ \&\text{or}\ b, form = MOD2)$

$$1+(1+(x+1)\,(y+1))^2\,(x\,y+1)\,(x\,(y+1)+1)\,(y\,(x+1)+1)$$

Таблицы истинности

> $T1 := TruthTable(a\ \&\text{xor}\ b, [x, y, z]);\quad T1_{true, false, true}$

$$T1 := table([\,(false, true, true) = false, (false, true, false) = false, (true, true, false) = false, (true, true, true) = false, (true, false, true) = false, (true, false, false) = false, (false, false, true) = true, (false, false, false) = true])$$

$$false$$

> $T2 := TruthTable(\,`\&not`(a)\ \&\text{nor}\ b\ \&\mathbf{iff}\ c, [x, y, z]);\quad T2_{true, false, false}$

$$T2 := table([\,(false, true, true) = false, (false, true, false) = false, (true, true, false) = true, (true, true, true) = true, (true, false, true) = true, (true, false, false) = true, (false, false, true) = false, (false, false, false) = true])$$

$$true$$

> $T3 := TruthTable(a\ \&\mathbf{iff}\ b, [x, y, z], form = MOD2);\ T3_{1,\,0,\,1}$

$$T3 := table([\,(1, 0, 0) = 1, (0, 1, 1) = 1, (1, 1, 0) = 1, (1, 1, 1) = 1, (1, 0, 1) = 1, (0, 0, 1) = 0, (0, 1, 0) = 1, (0, 0, 0) = 0])$$

$$1$$

Преобразование к стандартному виду Maple

> $Import(a\ \mathbf{or}\ b\ \mathbf{or}\ c, form = boolean)$

$$((x\ \&\text{or}\ y)\ \&\text{or}\ (((x\ \&\text{and}\ y\ \&\text{or}\ x\ \&\text{and}\ \&not(y))\ \&\text{or}\ y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{or}\ \&not(x)\ \&\text{and}\ \&not(y)))\ \&\text{or}\ (((y\ \&\text{and}\ z)\ \&\text{and}\ \&not(x)\ \&\text{or}\ (y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{and}\ \&not(z))\ \&\text{or}\ (z\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{and}\ \&not(y))$$

> $Import(\mathbf{not}\ (a\ \mathbf{xor}\ b) \Rightarrow c, form = boolean)$

$$Logic:-\&implies(\&not((x \mathbin{\&or} y) \mathbin{\&xor} (((x \mathbin{\&and} y \mathbin{\&or} x \mathbin{\&and} \&not(y)) \mathbin{\&or} y \mathbin{\&and} \&not(x)) \mathbin{\&or} \&not(x) \mathbin{\&and} \&not(y))), ((y \mathbin{\&and} z) \mathbin{\&and} \&not(x) \mathbin{\&or} (y \mathbin{\&and} \&not(x)) \mathbin{\&and} \&not(z)) \mathbin{\&or} (z \mathbin{\&and} \&not(x)) \mathbin{\&and} \&not(y))$$

> $Import(x\,(y+1)+z+1, form = MOD2)$

$$\&not(x \mathbin{\&and} \&not(y) \mathbin{\&xor} z)$$

Двойственное выражение

> $Dual((a \mathbin{\&and} `\&not`(a)) = false)$

$$(x \mathbin{\&and} y \mathbin{\&or} \&not(x \mathbin{\&and} y)) = true$$

> $Dual(a \mathbin{\&implies} b)$

$$Logic:-\&implies(\&not(x \mathbin{\&and} y), \&not(((x \mathbin{\&or} y) \mathbin{\&and} (x \mathbin{\&or} \&not(y))) \mathbin{\&and} (y \mathbin{\&or} \&not(x)) \mathbin{\&and} (\&not(x) \mathbin{\&or} \&not(y))))$$

> $Dual(`\&not`(a) \mathbin{\&nor} b \mathbin{\&iff} c)$

$$\&not(x \mathbin{\&and} y) \mathbin{\&nand} ((((x \mathbin{\&or} y) \mathbin{\&and} (x \mathbin{\&or} \&not(y))) \mathbin{\&and} (y \mathbin{\&or} \&not(x))) \mathbin{\&and} (\&not(x) \mathbin{\&or} \&not(y))) \mathbin{\&xor} (((y \mathbin{\&or} z) \mathbin{\&or} \&not(x)) \mathbin{\&and} ((y \mathbin{\&or} \&not(x)) \mathbin{\&or} \&not(z))) \mathbin{\&and} ((z \mathbin{\&or} \&not(x)) \mathbin{\&or} \&not(y)))$$

Тавтологии и противоречия

> $Tautology((a \mathbin{\&and} b \mathbin{\&or} `\&not`(a)) \mathbin{\&or} `\&not`(b))$

$$true$$

> $Tautology((a \mathbin{\&iff} b) \mathbin{\&or} b, 'p')$

$$true$$

> p

> $Tautology(a \mathbin{\&or} `\&not`(a), 'p')$

$$true$$

> $p;\ \ Contradiction((a \mathbin{\&or} `\&not`(a \mathbin{\&and} b)) \mathbin{\&nor} b)$

$$true$$

> $Contradiction((a \mathbin{\&iff} b) \mathbin{\&or} b, 'p')$

$$false$$

> p

$$\{x = false, y = false\}$$

> $Contradiction(\ `\&not`(a)\ \&\text{and}\ a, 'p')$

$$true$$

> p

Преобразование к канонической форме

> $Canonicalize(a\ \&\mathbf{iff}\ b, form = MOD2)$

$$y + x + x\,y$$

> $Canonicalize(a\ \&\mathbf{iff}\ b, \{x, y, z\}, form = CNF)$

$$((x\ \&\text{or}\ y)\ \&\text{or}\ z)\ \&\text{and}\ ((x\ \&\text{or}\ y)\ \&\text{or}\ \&not(z))$$

> $Canonicalize(a\ \&\mathbf{iff}\ b, \{x, y, z\}, form = DNF)$

$$(((((x\ \&\text{and}\ y)\ \&\text{and}\ z\ \&\text{or}\ (x\ \&\text{and}\ y)\ \&\text{and}\ \&not(z))\ \&\text{or}\ (x\ \&\text{and}\ z)\ \&\text{and}\ \&not(y))\ \&\text{or}\ (x\ \&\text{and}\ \&not(y))\ \&\text{and}\ \&not(z))\ \&\text{or}\ (y\ \&\text{and}\ z)\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{or}\ (y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{and}\ \&not(z)$$

Упрощение выражений (Убираем лишние скобки и тавтологии)

$Environment(2);\quad (a\ \&\text{and}\ b)\ \&\mathbf{and}\ (\ a\ \&\mathbf{or}\ \ a)$

$$(x\ \&\text{or}\ y)\ \&\text{and}\ (((x\ \&\text{and}\ y\ \&\text{or}\ x\ \&\text{and}\ \&not(y))\ \&\text{or}\ y\ \&\text{and}\ \&not(x))\ \&\text{or}\ \&not(x)\ \&\text{and}\ \&not(y))$$

$BooleanSimplify(\&\mathbf{not}\ a\ \&\mathbf{or}\ a)$

$$true$$

2. ЧИСЛОВАЯ СИСТЕМА

2.1. Натуральные числа. Простые числа, разложение на множители. НОД и НОК. Алгоритм Эвклида

Множество натуральных чисел – это бесконечное числовое множество, начинающееся с единицы; каждый последующий элемент которого получается путем прибавления единицы к предыдущему:

$$1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Натуральные числа классифицируются по различным признакам, например, по количеству делителей – простые и составные; по делимости на 2 – четные и нечетные. Из последовательности натуральных чисел можно выделить другие интересные последовательности, обладающие определенными свойствами. Например, *числа Фрибоначчи* – это последовательность, в которой первые два числа равны 1, а каждое последующее равно сумме предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….

Формальное определение натурального числа дал Джузеппе Пеано (1858-1932гг.). Этот итальянский математик создал аксиоматику натурального ряда чисел. Согласно Д. Пеано:

1. 1 является натуральным числом.
2. Число, следующее за натуральным, тоже является натуральным.
3. 1 не следует ни за каким натуральным числом.
4. Если натуральное число непосредственно следует как за числом , так и за числом , то и тождественны.
5. *(Аксиома индукции.)* Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа , вытекает, что оно верно для следующего за натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Аксиома (или принцип) математической индукции является одним из основных при определении понятий и доказательстве различных утверждений, относящихся к натуральным числам. Подробнее о принципе математической индукции сказано ниже.

Арифметические операции над натуральными числами

Над натуральными числами можно выполнять действия сложения и умножения, оставаясь при этом во множестве натуральных чисел, действия же вычитания и деления не всегда приводят к натуральным числам.

Сложение	***Умножение***
$a+b=c$,	$a \cdot b = c$,
a – слагаемое,	a – множимое,
b – слагаемое,	b – множитель,
c – сумма.	c – произведение.

Умножение

$a \cdot b = c$,

a – множимое,
b – множитель,
c – произведение.

Деление

$a : b = c$ или $\dfrac{a}{b} = c$,

a – делимое,
b – делитель,
c – частное.

Свойства операций сложения и умножения

1) $a \cdot 1 = a$;
2) $a + b = b + a$ – коммутативность сложения;
3) $a \cdot b = b \cdot a$ – коммутативность умножения;
4) $c + (a + b) = (c + a) + b = a + c + b$ – ассоциативность сложения;
5) $c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = a \cdot c \cdot b$ – ассоциативность умножения;
6) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Простые и составные числа.
Разложение чисел на простые множители. НОД, НОК

Важная классификация натуральных чисел предполагает разделение их по количеству делителей. По этому признаку все числа натурального ряда можно разбить на три группы: *простые*, имеющие только два делителя, единицу и само себя; *составные*, имеющие более двух делителей и *единицу*, которая не относится ни к простым, ни к составным, т.к. имеет всего один делитель – единицу (рис…).

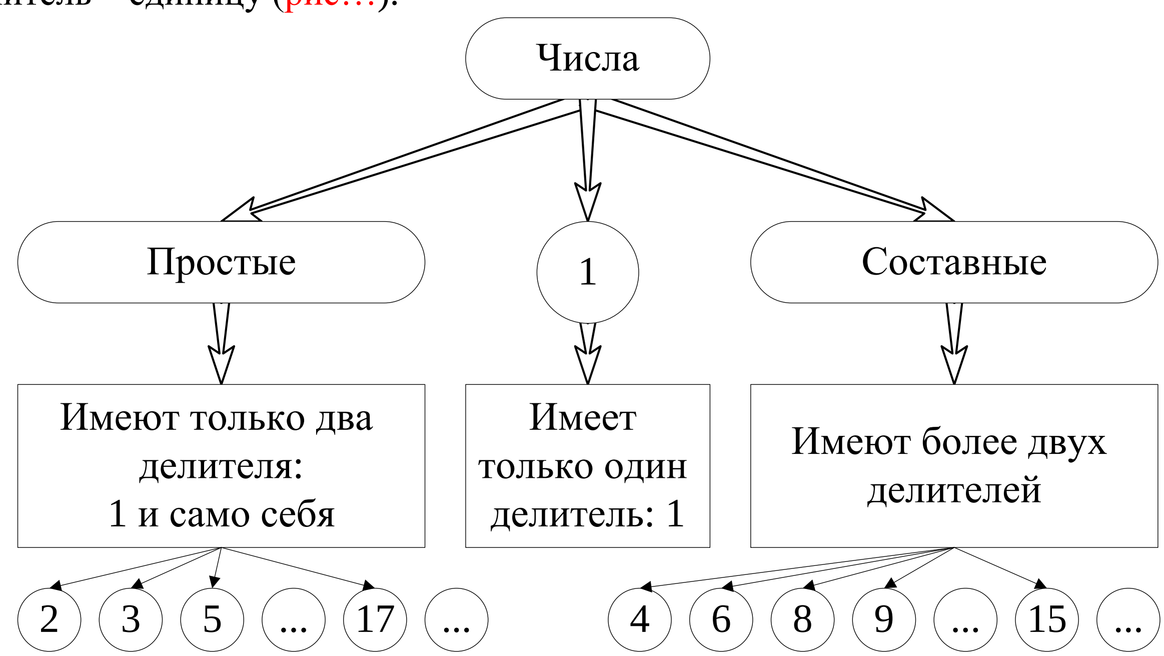


Рис.

Еще один важный критерий, по которому разбивают натуральный ряд – делимость на два. Числа, которые делятся на два, называются *четными* и обозначаются $к = 2 \cdot n$, где $n = 1, 2, ...$; остальные называются *нечетными* и записываются $к = 2 \cdot n + 1$ или $к = 2 \cdot n - 1$.

Для того, чтобы быстро определять, делится ли данное число на какое-либо другое число, используются *признаки делимости*. В таблице приведены признаки делимости на числа первого десятка.

Признаки делимости

Число делится на	если	Примеры
«2»	его последняя цифра делится на «2» или является нулем	12, 38, 120376
«3»	его сумма цифр делится на «3»	123: 1+2+3=6
«4»	если последние две цифры нули или образуют число, делящееся на «4»	684, 704, 2700
«5»	его последняя цифра «5» или «0»	15, 200, 305, 2460
«6»	если число одновременно делится на «2» и на «3»	252, 774, 2700
«8»	если последние три цифры нули или образуют число, делящееся на «8»	33488, 23000
«9»	его сумма цифр делится на «9»	684: 6+8+4=18
«10»	его последняя цифра «0»	100, 1230, 2090

Замечание. Признак делимости на 7 тоже существует, но из-за своей трудоемкости мало используется. Зачастую проще поделить число на 7, чем использовать этот признак.

Пример. Используя признаки делимости, выяснить на какие числа первого десятка делится число 362880?

Решение:

1) число делится на «1»;
2) число делится на «2», т.к. последняя цифра «0»;
3) число делится на «3», т.к. сумма цифр: 3+6+2+8+8+0=27 – делится на «3»;
4) число делится на «4», т.к. число, образованное последними двумя цифрами – 80 – делится на «4»;
5) число делится на «5», т.к. последняя цифра «0»;
6) число делится на «6», т.к. оно делится на «2» и на «3»;
7) число делится на «7», 362880:7=51840;
8) число делится на «8», т.к. последние три цифры образуют число – 880, делящееся на «8»;
9) число делится на «9», т.к. сумма цифр делится на «9»;
10) число делится на «10», т.к. последняя цифра «0».

Ответ: число 362880 делится на все числа первого десятка.

Теорема. Любое составное число можно разложить на простые множители, причем единственным способом.

Пример.

а)
$$\begin{array}{r|l} 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r|l} 2457 & 3 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Число, на которое делится каждое из данных чисел, называется их *общим делителем*. Числа, не имеющие общих делителей, кроме 1, называются *взаимно простыми*.

Пример. У чисел 14 и 22 общий делитель – 2, а у чисел 15 и 30 три общих делителя: 3, 5, 15. Числа 14 и 15 – взаимно простые, т.к. не имеют общих делителей.

Самый большой из общих делителей данных чисел называется их *наибольшим общим делителем* (НОД).

Правило
Чтобы найти НОД нескольких чисел, нужно разложить их на простые множители; выписать их ***общие простые*** множители и взять их в ***наименьшей*** степени.

Пример. Найти НОД чисел а) 18 и 24; б) 64 и 50; в) 210, 90 и 750; г) 455 и 132.

Решение:

а)
$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$\text{НОД}(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6.$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$$

$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

$$НОД(64,50) = 2.$$

в)

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

$$НОД(210,90,750) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

г)

$$\begin{array}{r|l} 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$

$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$НОД(455,132)$ – не существует, числа 455 и 132 – взаимно простые.

Число, которое делится на каждое из данных чисел, называется их *общим кратным*.

Пример. Для чисел 3 и 8 общим кратным является каждое из чисел: 24, 48, 72, 96, 120, … .

Замечание: общих кратных у чисел бесконечно много.

Самое меньшее из общих кратных данных чисел называется их *наименьшим общим кратным* (НОК).

Правило

Чтобы найти НОК нескольких чисел, нужно разложить их на простые множители; выписать их ***все простые*** множители и взять их в ***наибольшей*** степени.

Пример. Найти НОК чисел а) 3 и 8; б) 64 и 50; в) 5, 12 и 20; г) 63, 280 и 150.

Решение:

а)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$3 = 3$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$$НОК(3,8) = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

б)

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$$

$$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$$

$$\text{НОК}(64, 50) = 2^6 \cdot 5^2 = 1600.$$

в)

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$5 = 5$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \qquad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$\text{НОК}(5, 12, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

г)

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7 \quad 280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{НОК}(63, 280, 150) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600.$$

Пример. Найти сумму наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел 126 и 138.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 138 & 2 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad 138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$$

$\text{НОД}(126, 138) = 2 \cdot 3 = 6$;

$\text{НОК}(126, 138) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 = 2898$;

$\text{НОД}(126, 138) + \text{НОК}(126, 138) = 6 + 2898 = 2904$.

Пример. Найти частное от деления наименьшего общего кратного чисел 2520 и 1188 на их наибольший общий делитель.

Решение:

2520	2		1188	2
1260	2		594	2
630	2		297	3
315	3		99	3
105	3		33	3
35	5		11	11
7	7		1	
1				

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$$

$\text{НОД}(2520{,}1188) = 2^2 \cdot 3^2$;

$\text{НОК}(2520{,}1188) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$;

$$\frac{\text{НОК}(2520{,}1188)}{\text{НОД}(2520{,}1188)} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

Теорема. Произведение НОД и НОК чисел равно произведению этих чисел.

Пример. Найти произведение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 78 и 64.

Решение:

$$78 = 2 \cdot 39;\ 64 = 2^6;\ \text{НОД}(78, 64) = 2;\ \text{НОК}(78, 64) = 2^6 \cdot 39 = 2496;$$

$$\text{НОД}(78, 64) \cdot \text{НОК}(78, 64) = 2 \cdot 2496 = 4992;\ 78 \cdot 64 = 4992.$$

Замечание. Зная только НОД по этой теореме можно найти НОК.

Алгоритм Эвклида нахождения НОД

Если известны разложения некоторых чисел на простые множители, то по указанным правилам можно найти их НОД и НОК. Однако для достаточно больших чисел процесс такого разложения становится довольно трудоемким. Существует еще один способ нахождения НОД, не предполагающий полного разложения на простые множители, который называется *алгоритмом Эвклида*.

Операция *деления натурального числа n на число m с остатком* – это операция при которой число n можно представить в виде:

$$n = m \cdot p + r,$$

где p – частное, r – остаток от деления числа n на число m.

Если $r = 0$, то говорят что число n делится на число m без остатка.

Пусть $n, m \in N$ и $n > m$.

Правило

Чтобы найти НОД двух чисел, нужно

– разделить число n на число m и найти остаток от деления r_1;
– если $r_1>0$, то разделить m на r_1 и найти остаток от деления r_2;
– если $r_2>0$, то разделить r_1 на r_2 и найти остаток от деления r_3;

– если $r_3>0$, то разделить r_2 на r_3 и найти остаток от деления r_4;
– …
– если $r_{k+1}=0$, то r_k будет НОД чисел n и m.

Пример. Найти НОД и НОК чисел 4158 и 651.
Решение:

$$1)\ \begin{array}{r|l} 4158 & 651 \\ \underline{3906} & 6 \\ 252 & \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r|l} 651 & 252 \\ \underline{504} & 2 \\ 147 & \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r|l} 252 & 147 \\ \underline{147} & 1 \\ 105 & \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{r|l} 147 & 105 \\ \underline{105} & 1 \\ 42 & \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r|l} 105 & 42 \\ \underline{84} & 2 \\ 21 & \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{r|l} 42 & 21 \\ \underline{42} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Предпоследний остаток равен 21, это и есть НОД чисел 4158 и 651. НОК найдем по теореме, согласно которой произведение чисел равно произведению их НОД и НОК:

$4158\cdot 651=\text{НОД}(4158, 651)\cdot\text{НОК}(4158, 651)$, откуда

$4158\cdot 651=21\cdot\text{НОК}(4158, 651) \Rightarrow \text{НОК}(4158, 651)=(4158\cdot 651):21=128898$.

Ответ: НОД(4158, 651)=21; НОК(4158, 651)=128898.

Принцип математической индукции

Определение. *Индукцией* называется метод рассуждений, ведущий от частных примеров к общему выводу.

Пример. Сложим нечётные числа 1,3,5,7, …, $2n-1$ при различных значениях переменной n=1,2,3, …, получим:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2, \text{ и т.д.}$$

Легко заметить, что во всех приведённых примерах сумма первых нечётных натуральных чисел равна квадрату числа слагаемых. Таким образом, можно предположить, что, то же свойство будет иметь место при любом числе слагаемых.

Определение. Метод, при котором делается вывод после разбора нескольких примеров, не охватывающих всех возможных случаев, называется *неполной индукцией*. Если же вывод делается на основании разбора всех случаев, то такой метод называется *полной индукцией*.

Не всегда возможно разобрать все случаи, т.к. часто их бывает очень много или бесконечно много. В этих случаях метод полной индукции неприменим. Для доказательств утверждений, для которых невозможно перебрать все случаи применяется *метод математической индукции*.

Метод математической индукции

Пусть $n, k \in N$.

Если предложение истинно для $n=1$ и из предположения, что оно истинно для $n=k$ следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, то это предложение истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции состоит из трёх частей:

1) доказать, что утверждение истинно для $n=1$;

2) предположить, что это утверждение истинно для $n=k$;

3) доказать, что данное утверждение истинно для $n=k+1$, исходя из предположения, что утверждение истинно для $n=k$.

Метод математической индукции используется для доказательства разнообразных утверждений: тождеств, неравенств, делимости выражений и др.

Пример. Доказать, что при любом натуральном значении n истинно равенство:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Решение:

1) докажем, что равенство истинно при $n=1$:

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2},\ 1=1, \text{ равенство верно;}$$

2) предположим, что равенство истинно при $n=k$, т.е.

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2};$$

3) из предположения, что равенство верно при $n=k$ докажем, что оно верно при $n=k+1$:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+k+2k+2}{2},$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}, \text{ равенство верно.}$$

Исходя из принципа математической индукции равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

верно при любом натуральном значении n.

Пример. Доказать, что при любом натуральном n выражение $2^{5n+3}+5^{n}\cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

Решение:

4) докажем, что равенство истинно при n=1:

$$2^{5\cdot 1+3}+5^{1}\cdot 3^{1+2}=256+135=391=17\cdot 23 \text{ – делится на 17;}$$

5) предположим, что равенство истинно при n=k, т.е.

$$2^{5k+3}+5^{k}\cdot 3^{k+2};$$

6) из предположения, что равенство верно при n=k докажем, что оно верно при n=k+1:

$$2^{5(k+1)+3}+5^{k+1}\cdot 3^{k+1+2}=32\cdot 2^{5k+3}+15\cdot 5^{k}\cdot 3^{k+2}=$$
$$=32\cdot\underbrace{\left(2^{5k+3}+5^{k}\cdot 3^{k+2}\right)}_{\substack{\text{делится на } 17\\ \text{из предположения}}}-\underbrace{17\cdot 5^{k}\cdot 3^{k+2}}_{\text{делится на } 17}.$$

Исходя из принципа математической индукции выражение $2^{5n+3}+5^{n}\cdot 3^{n+2}$ делится на 17 при любом натуральном значении n.

2.2. Целые числа и арифметика вычетов

Множество целых чисел получается в результате добавления к множеству натуральных чисел нуля и натуральных чисел с отрицательными знаками.

Любому натуральному числу n соответствует число $-n$, которое называется *противоположным* к n; сумма противоположных чисел равна 0: $n+(-n)=0$. Число, противоположное $-n$ есть само число n: $-(-n)=n$.

Модуль числа

Модулем (*абсолютной величиной*) числа n называется число, обозначаемое $|n|$ и равное $-n$, если $n<0$ и n, если $n\geq 0$:

$$|n| = \begin{cases} n, \text{ если } n \geq 0, \\ -n, \text{ если } n < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$
2. $-|a| \leq a \leq |a|$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$
7. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$
8. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
9. $|a| \geq b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq b, \\ a \leq -b. \end{array}\right.$
10. $|a^n| = |a|^n$

Арифметические операции над целыми числами

Сложение	**Вычитание**
$a+b=c$,	$a-b=c$,
a – слагаемое,	a – уменьшаемое,
b – слагаемое,	b – вычитаемое,
c – сумма.	c – разность.
Умножение	***Деление***
$a \cdot b = c$,	$a:b=c$ или $\dfrac{a}{b}=c$,
a – множимое,	a – делимое,
b – множитель,	b – делитель,
c – произведение.	c – частное.

Действия с числами разных знаков

Пусть n и m – целые положительные числа.

Сложение	
Чтобы сложить числа одинаковых знаков, нужно вычислить сумму их модулей и поставить перед суммой знак слагаемых.	$(+n)+(+m)=+(\lvert n\rvert+\lvert m\rvert)$; $(-n)+(-m)=-(\lvert n\rvert+\lvert m\rvert)$.

Чтобы сложить два числа разных знаков, нужно из большего модуля вычесть меньший модуль и перед разностью поставить знак слагаемого, имеющего больший модуль.	$(-n)+(+m)=-(\lvert n\rvert-\lvert m\rvert)$, если $\lvert n\rvert>\lvert m\rvert$; $(-n)+(+m)=+(\lvert m\rvert-\lvert n\rvert)$, если $\lvert m\rvert>\lvert n\rvert$.
Вычитание	
Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.	$n-m=n+(-m)$.
Умножение	
Произведением двух целых чисел называется произведение их модулей, взятое со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «–», если они разных знаков.	$(+n)\cdot(+m)=+n\cdot m$; $(-n)\cdot(-m)=+n\cdot m$; $(-n)\cdot(+m)=-n\cdot m$; $(+n)\cdot(-m)=-n\cdot m$.
Деление	
Если $\lvert n\rvert$ делится на цело на $\lvert m\rvert$, то частное целых чисел n и m равно частному их модулей, взятому со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «–», если они разных знаков.	$\frac{(+n)}{(+m)}=+\frac{n}{m}$; $\frac{(-n)}{(-m)}=+\frac{n}{m}$; $\frac{(-n)}{(+m)}=-\frac{n}{m}$; $\frac{(+n)}{(-m)}=-\frac{n}{m}$.

Порядок действий

1. Действия в скобках.
2. Умножение, деление.
3. Сложение, вычитание.

Пример. Вычислить значения выражений:

а) (1 070 – 104 040:2 312)·74 + 6 489;

б) 38·203 + 75·(514 – 476) + (15 + 23)·22.

Решение:

а) определяем порядок действий:

$$\left(1\,070\overset{2}{-}104\,040\overset{1}{:}2\,312\right)\overset{3}{\cdot}74\overset{4}{+}6\,489=82\,339;$$

выполняем действия по порядку:

$$1)\ \begin{array}{r|l} 104040 & 2312 \\ \cline{2-2} 9248 & 45 \\ \cline{1-1} 11560 & \\ 11560 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 1070 \\ -\ \ 45 \\ \hline 1025 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 1025 \\ \times\ \ 74 \\ \hline 4100 \\ 7175 \\ \hline 75850 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 75850 \\ +\ 6489 \\ \hline 82339 \end{array}$$

б) $38 \cdot 203 + 75 \cdot (514 - 476) + (15 + 23) \cdot 22 = 38 \cdot 203 + 75 \cdot 38 + 38 \cdot 22 =$
$= 38 \cdot (203 + 75 + 22) = 38 \cdot 300 = 11400.$

Делимость чисел

Разделить число a на число b (b>0) с остатком – значит представить число a в виде $a=bq+r$, где $0 \le r \le b$. Число q называется *неполным частным*, а число r – *остатком от деления* a на b.

r=0 тогда и только тогда, когда $a \vdots b$. В этом случае q равно частному от деления a на b.

Теорема 1. Если M – общее кратное a и b, а m – их НОК, то $M \vdots m$.

Теорема 2. НОК двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Следствие. Для того, чтобы число a делилось на взаимно простые числа b и c, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на их произведение.

Теорема 3. Если $ab \vdots c$, причем числа b и c взаимно простые, то $a \vdots c$.

Теорема 4. Если произведение нескольких сомножителей делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

Следствие. Если p – простое и $0 \le k \le p$, то число сочетаний C_p^k делится на p.

Теорема 5 (основная теорема арифметики). Всякое целое положительное число, кроме единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом.

Произведение $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, где $p_1, p_2, \dots, p_r$ – различные простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – некоторые целые положительные числа, называется *каноническим разложением числа* a.

Теорема 6. Для того, чтобы числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы ни один из простых сомножителей, входящих в каноническое разложение числа a, не входил в каноническое разложение числа b.

Теорема 7. Для делимости $b \vdots a$ необходимо и достаточно, чтобы было $b \vdots p_1^{\alpha_1}$, $b \vdots p_2^{\alpha_2}$, …, $b \vdots p_r^{\alpha_r}$.

Теорема 8. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение числа a. Тогда для делимости $a \vdots b$ необходимо и достаточно, чтобы каноническое разложение числа b имело вид $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$, где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, …, $0 \le \beta_r \le \alpha_r$.

Теорема 9. Пусть m и t – натуральные числа. Тогда m можно представить в виде такого произведения $m = m_1 m_2$, что $(m_1, t) = 1$ (взаимно простые) и найдется такое k, для которого $t^k \vdots m_2$.

Числа a и b называются *равноостаточными* при делении на m, если остатки от деления a и b на m равны.

Теорема 10. Для того, чтобы числа a и b были равноостаточными при делении на m, необходимо и достаточно, чтобы $(a-b)\vdots m$.

Следствие. Если числа a и b равноостаточны при делении на m и $m\vdots d$, то a и b равноостаточны при делении на d.

Теорема 11. Если при делении на m числа $a_1, a_2, ..., a_n$ соответственно равноостаточны числам $b_1, b_2, ..., b_n$, то равноостаточными будут суммы $a_1 + a_2 + ... + a_n$ и $b_1 + b_2 + ... + b_n$, а также произведения $a_1 a_2 ... a_n$ и $b_1 b_2 ... b_n$.

Следствие. Если при делении на m числа a и b равноостаточны, то такими же являются и степени a^n и b^n при любом натуральном n.

Равноостаточные при делении на m числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m. Это обозначается $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ и называется *сравнением*.

2.3. Рациональные числа. Примеры иррациональностей. Периодические дроби

Периодические дроби

Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр постоянно повторяются в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью.

Пример. Дроби 0,63636363…=0,(63), 23,24734343434…=23,247(34) являются периодическими.

Цифра или совокупность цифр, которые повторяются в периодической дроби, образуют число, называемое периодом этой дроби.

Пример. Период дроби 0,63636363…=0,(63) равен 63.

Если период дроби начинается сразу после запятой, то дробь называется чистой периодической, если же между запятой и первым периодом есть число, которое не повторяется, то дробь называется смешанной периодической.

Пример. Дробь 0,(63) – чисто периодическая, а дробь 23,247(34) – смешанная периодическая.

Замечание: всякая конечная десятичная дробь имеет период равный 0.

Теорема 1. Всякое рациональное число может быть представлено периодической дробью, и такое представление единственное.

Правило

Любая несократимая обыкновенная дробь, знаменатель которой содержит простые множители, отличные от множителей 2 и 5, обращается в периодическую дробь, период которой отличен от 0. Если множители 2 и 5 вообще отсутствуют, то получится чистая периодическая дробь.

При наличии множителей 2 и 5 или обоих получится смешанная периодическая дробь.

Пример. Обратить обыкновенные дроби в десятичные, определить, являются ли они периодическими, чистыми или смешанными; их найти периоды: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{9}{41}$; г) $\frac{7}{8}$.

Решение:

а) $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 1{,}0 & 3 \\ \underline{9} & 0{,}333 \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$

Дробь чистая периодическая

Период равен 3

б) $\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 6 \\ \underline{48} & 0{,}833 \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 0{,}833... = 0{,}8(3)$

Дробь смешанная периодическая

Период равен 3

в) $\frac{9}{41}$

$$\begin{array}{r|l} 9{,}0 & 41 \\ \underline{82} & 0{,}219512 \\ 80 & \\ \underline{41} & \\ 390 & \\ \underline{369} & \\ 210 & \\ \underline{205} & \\ 50 & \\ \underline{41} & \\ 90 & \\ \underline{82} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{9}{41} = 0{,}219512... = 0{,}(21951)$

Дробь чистая периодическая

Период равен 21951

г) $\frac{7}{8}$

$$\begin{array}{r|l} 7{,}0 & 8 \\ \underline{64} & 0{,}875 \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \end{array}$$

$\frac{7}{8} = 0{,}875... = 0{,}875(0)$

Дробь конечная,

смешанная периодическая

Период равен 0

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Теорема 2. Всякая периодическая дробь может быть обращена в обыкновенную.

Это можно сделать двумя способами

Правило 1

Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, нужно ее период сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, нужно из числа, стоящего после запятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и разность сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями справа, сколько цифр между запятой и периодом.

Пример. Обратить периодические дроби в обыкновенные: а) 1,(25); б) 3,1(2); в) 0,1(9); г) 0,(571428).

Решение:

а) $1,(25)=1\frac{25}{99}$;

б) $3,1(2)=3\frac{12-1}{90}=3\frac{11}{90}$;

в) $0,1(9)=\frac{19-1}{90}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$;

г) $0,(571428)=\frac{571428}{999999}=\frac{4}{7}$.

Правило 2

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, нужно обозначить ее за x; полученное равенство умножить на 10^k, где k – число цифр после запятой до первого периода; затем это же равенство умножить на 10^m, где m – количество цифр в периоде. После чего из последнего равенства вычесть предыдущее и выразить x из получившегося уравнения.

Пример. Обратить периодические дроби в обыкновенные: а) 1,(25); б) 3,1(2); в) 0,1(9); г) 0,(571428).

Решение:

а) $1,(25)=x$;
$125,(25)=100x$;

б) $3,1(2)=x$;
$31,(2)=10x$;

$$125,(25) - 1,(25) = 100x - x;$$
$$124 = 99x;$$
$$x = \frac{124}{99} = 1\frac{25}{99}.$$

$$312,(2) = 100x;$$
$$312,(2) - 31,(2) = 100x - 10x;$$
$$281 = 90x;$$
$$x = \frac{281}{90} = 3\frac{11}{90}.$$

в) $0,1(9) = x;$
$$1,(9) = 10x;$$
$$19,(9) = 100x;$$
$$19,(9) - 1,(9) = 100x - 10x;$$
$$18 = 90x;$$
$$x = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

г) $0,(571428) = x;$
$$571428,(571428) = 1000000x;$$
$$571428,(571428) - 0,(571428) =$$
$$= 1000000x - x;$$
$$571428 = 999999x;$$
$$x = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}.$$

Замечание. Число 0,1(9) равно числу 0,2 (точно, а не приближенно), т.к. в числе 0,1(9) бесконечное количество девяток. Поэтому при переводе этой периодической дроби в обыкновенную получилась дробь $\frac{1}{5}$, которая равна 0,2.

Пример. Записать в виде десятичных непериодических дробей: а) 1,(9); б) 12,3(9); в) 0,93(9); г) 3,48(9).

Решение:

а) $1,(9) = 2;$ б) $12,3(9) = 12,4;$

в) $0,93(9) = 0,94;$ г) $3,48(9) = 3,49.$

2.4. Действительные числа. Определение. Десятичное представление. Числа e и π

Хотя по-настоящему строго действительные числа были определены только во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом, представление об их существовании сформировалось, как уже отмечалось, ещё у древних греков.

Два отрезка называются *соизмеримыми*, если они имеют *общую меру*, то есть если существует такой отрезок, который укладывается целое число раз и в первом, и во втором отрезке. Если такого отрезка нет, отрезки называются *несоизмеримыми*. Примером несоизмеримых отрезков являются сторона и диагональ квадрата. Действительно, если принять сторону квадрата за a, а длину диагонали за c, то из теоремы Пифагора будет следовать, что

$$c^2 = 2a^2. \qquad (1)$$

Соизмеримость означает, что $c = ml$, $a = nl$, где l — общая мера. Поэтому уравнение (1) перепишется в виде

$$m^2 = 2n^2, \qquad m, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Можно считать, что числа m и n не имеют общего делителя (в противном случае на этот делитель можно было бы сократить). Из уравнения (2) следует, что число m делится на 2, то есть $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, $2k^2 = n^2$ и, следовательно, n тоже делится на 2. Но это противоречит предположению о том, что m и n не имеют общего делителя. Следовательно, представление (2) невозможно.

Несмотря на полученный выше отрицательный результат, мы можем сколь угодно точно найти выражение величины c через a. Именно, положим $c = ax$, и тогда равенство (1) примет вид

$$x^2 = 2. \tag{3}$$

Поскольку $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$, искомое решение, если оно существует, должно лежать в интервале $(1,2)$. Рассмотрим середину этого интервала — число $\frac{3}{2}$; оно отличается от решения не более чем на $\frac{1}{2}$. Далее очевидно, что решение должно лежать в интервале $(1, \frac{3}{2})$, поскольку $(\frac{3}{2})^2 > 2$. Следовательно, число $\frac{5}{4}$ — середина интервала $(1, \frac{3}{2})$ — отличается от решения не более, чем на $\frac{1}{4}$. На следующем шаге мы замечаем, что решение лежит в интервале $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ и так далее, до бесконечности.

Рассмотренный пример показывает, что существует нечто, являющееся решением уравнения (3), но это — не рациональное число, хотя и может быть как угодно точно приближено рациональными числами. Что это такое объясняется ниже.

Действительные числа, с которыми люди сталкиваются в обыденной жизни, являются, как правило, десятичными дробями. Это не случайно.

Предложение 1. Пусть α — действительное число. Тогда для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные десятичные дроби d и d', что $d - d' \leq \varepsilon$ и $d \leq \alpha \leq d'$.

Число d называется *приближением с недостатком*, число d' — *приближением с избытком*, а величина $\frac{\varepsilon}{2}$ — *точностью приближения*.

Предложение 1 означает, что произвольные действительные числа можно мыслить себе как *бесконечные десятичные дроби.* Рассмотрим такую дробь и обозначим -ю десятичную цифру после запятой через c_k (если дробь конечна и имеет длину, меньшую k, то $c_k = 0$). Скажем, что дробь *периодическая* если найдутся такие натуральные числа K и p, что $c_k = c_{k+p}$, для всех $k \geq K$.

Предложение 2. Действительное число является рациональным тогда и только тогда, когда соответствующая ему десятичная дробь является периодической.

Арифметические операции

Определение**1.** Пусть α и β — действительные числа. Их *суммой* называется число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$a + b \leq \gamma \leq a' + b',$$

где a, a', b, b' — произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a \leq \alpha \leq a', \qquad b \leq \beta \leq b'.$$

Сумма обозначается через $\alpha + \beta$.

Предложение 3. Для любых действительных чисел их сумма существует, единственна и обладает следующими свойствами*:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
3. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
4. Для любого числа α существует такое число $-\alpha$ *(*число, противоположное α*)*, что $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.
5. Если $\alpha < \beta$, то и $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$.

Определим *модуль* (или *абсолютную величину*) числа α, полагая

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Определение 2. Пусть α и β — положительные действительные числа. Их *произведением* называется число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$ab \le \gamma \le a'b',$$

где a, a', b, b' — произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < a \le \alpha \le a', \qquad 0 < b \le \beta \le b'.$$

Произведение обозначается через $\alpha \cdot \beta$ (или $\alpha\beta$). Если $\beta = 0$, то мы полагаем

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

Для произвольных α и β их произведение определяется следующим образом:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака}, \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков}. \end{cases}$$

Предложение 4. Для любых действительных чисел их произведение существует, единственно и обладает следующими свойствами:

1. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
3. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
5. Для любого числа $\alpha \ne 0$ существует такое число α^{-1} (число, обратное к α), что $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.
6. Если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0$, то и $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Степени и логарифмы

1. Пусть α — действительное число и n — целое. Положим

$$\alpha^n = \begin{cases} \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0 \text{ и } \alpha \ne 0, \\ \dfrac{1}{\alpha^{-n}}, & \text{если } n < 0 \text{ и } \alpha \ne 0. \end{cases}$$

2. При $\alpha = 0$ и $n \le 0$ величина α^n не определена.

Предложение 5. *Существование корней.* Пусть $\alpha > 0$ — действительное число. Тогда для любого целого числа n существует и единственно такое действительное число $\beta > 0$, что

$$\beta^n = \alpha.$$

Число β называется *арифметическим корнем -й степени из* α и обозначается либо через $\sqrt[n]{\alpha}$, либо через $\alpha^{-\frac{1}{n}}$. Если $\alpha < 0$ и n нечётно, то мы полагаем $\sqrt[n]{\alpha} = -\sqrt[n]{-\alpha}$. Для любого рационального числа r, представленного в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, положим

$$\alpha^r = (\alpha^m)^{\frac{1}{n}}$$

во всех случаях, когда это выражение имеет смысл.

Определение 3. Пусть $\alpha > 1$ и β — действительные числа. *Степенью* числа α *с показателем* β называется такое число γ, что

$$\alpha^b \leq \gamma \leq \alpha^{b'},$$

где b и b' — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 < b \leq \beta \leq b'.$$

Степень обозначается через α^β. Если $0 < \alpha < 1$, то мы полагаем

$$\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}.$$

По определению $1^\beta = 1$.

Предложение 6. Для любых действительных чисел $\alpha > 0$ и β их степень α^β существует, единственна и обладает следующими свойствами:

1. $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.
2. $\frac{1}{\alpha^\beta} = \alpha^{-\beta}$.
3. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
4. $\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$.

Предложение 7. Для любых действительных чисел $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, и $\beta > 0$ существует такое единственное число γ, что $\alpha^\gamma = \beta$. Это число называется *логарифмом* числа β *по основанию* α, обозначается через $\log_\alpha \beta$ и обладает следующими свойствами:

1. $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma = \log_\alpha \gamma$ (в частности, $\log_\alpha \beta = \frac{1}{log_\beta \alpha}$).
2. $\log_\alpha(\beta\gamma) = \log_\alpha \beta + \log_\alpha \gamma$.
3. $\log_\alpha(\beta^\gamma) = \gamma \log_\alpha \beta$.

Приближённые значения некоторых постоянных

$\pi \approx 3{,}1416$	$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$	$\lg e \approx 0.4343$
$2\pi \approx 6{,}2832$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$	$\ln \pi = 1{,}1447$
$\sqrt{\pi} \approx 1{,}7725$	$\sqrt{5} \approx 2{,}2361$	$\ln e = 1$
$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$	$\sqrt{6} \approx 2{,}4495$	$\ln 1 = 0$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}5642$	$\sqrt{7} \approx 2{,}6458$	$\ln 2 \approx 0.6931$
$\pi^2 \approx 9{,}8696$	$\sqrt{8} \approx 2{,}8284$	$\ln 3 \approx 1.0986$
$\pi^3 \approx 31{,}0063$	$\sqrt{10} \approx 3{,}1623$	$\ln 4 \approx 1.3863$
$\pi^4 \approx 97{,}4091$	$e \approx 2{,}7183$	$\ln 5 \approx 1.6094$
$\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$	$e^2 \approx 7.3801$	$\ln 6 \approx 1.7918$
	$\frac{1}{e} \approx 0.3679$	$\ln 7 \approx 1.9459$
		$\ln 8 \approx 2.0794$
		$\ln 9 \approx 2.1972$
		$\ln 10 \approx 2.3026$

2.5. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Решение алгебраических уравнений

Определение комплексных чисел.

Определение 1.1. Выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2 = -1$, называется комплексным числом; i – называется мнимой единицей; a – действительной частью; bi – мнимой частью.

Обозначается: $a = Re\, z$, $b = Im\, z$.

Примеры.

1.1. $z = 5 + 3i$, $Re\, z = 5$, $Im\, z = 3$;

1.2. $z = -2 + 5i$, $Re\, z = -2$, $Im\, z = 5$.

З а м е ч а н и е. Термин «комплекс» имеет французское происхождение. По правилам французского языка все слова имеют ударение в последнем слоге. Поэтому правильно произносить «компле́кс», а «компле́ксные».

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

◆ Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных чисел при $b = 0$. Числа, у которых $b \neq 0$, называются мнимыми, а если $a = 0$ и $b \neq 0$, то – чисто мнимыми.

Примеры.

1.3. $z = 5$ – комплексное число, у которого $b = 0$;

1.4. $z = 5i$ – чисто мнимое число.

З а м е ч а н и е . Понятия «больше» или «меньше» для комплексных чисел не определяются. То есть комплексные числа нельзя сравнить или сказать о них положительны они или отрицательны.

Арифметические операции над комплексными числами.

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

2.1. Сложение.

Чтобы сложить два комплексных числа, нужно отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Определение 2.1. Число $-z = -a - bi$ называется противоположным числу $z = a + bi$.

2.2. Вычитание.

Разность чисел z_1 и z_2 можно рассматривать как сумму чисел z_1 и $-z_2$, то есть z_1 и противоположного z_2:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i.$$

2.3. Умножение.

Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу умножения многочлена на многочлен, учитывая что $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Определение 2.2. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу $z = a + bi$. Числа z и $\bar{z}$ называются взаимно сопряженными.

Пример 2.1.

Числа $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ являются сопряженными.

◆ Сумма двух взаимно сопряженных чисел – есть число действительное:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,Re\,z.$$

Пример 2.2.

Сумма чисел $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ равна:

$$z + \bar{z} = (2 - 3i) + (2 + 3i) = (2 + 2) + (-3 + 3)i = 4.$$

◆ Произведение двух взаимно сопряженных чисел – есть число действительное:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = (Re\,z)^2 + (Im\,z)^2.$$

Пример 2.3.

Произведение чисел $z = 2 - 3i$ и $\overline{z} = 2 + 3i$ равно:

$$z \cdot \overline{z} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

2.4. Деление.

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$. Домножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i.$$

Примеры.

2.4. $(5 + 3i) + (4 - 2i) = (5 + 4) + (3 - 2)i = 9 + i$;

2.5. $(5 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 4) + (3 - (-2))i = 1 + 5i$;

2.6. $(5 + 3i) \cdot (4 - 2i) = 20 - 10i + 12i + 6 = 26 + 2i$;

2.7. $\frac{5 + 3i}{4 - 2i} = \frac{(5 + 3i) \cdot (4 + 2i)}{(4 - 2i) \cdot (4 + 2i)} = \frac{20 + 10i + 12i - 6}{16 + 4} = \frac{14 + 22i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{11}{10} i$.

2.5. Свойства арифметических операций над комплексными числами.

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативность сложения;

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – ассоциативность сложения;

3°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – коммутативность умножения;

4°. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – ассоциативность умножения;

5°. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

◆ Докажем свойство 5°.

Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$, тогда

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (x_1 + y_1 i) \cdot [(x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i)] = (x_1 + y_1 i) \cdot [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i] =$$

$$= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (y_2 + y_3)i + y_1 \cdot (x_2 + x_3)i + y_1 \cdot (y_2 + y_3)i^2 =$$

С

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1y_2 i + x_1y_3 i + y_1x_2 i + y_1x_3 i - y_1y_2 - y_1y_3 =$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)i.$$

другой стороны:

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i) \cdot (x_3 + y_3 i) =$$

$$(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i + (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_1y_3 + y_1x_3)i =$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)i$$

Таким образом, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Что и требовалось доказать.

Свойства 1°–4° доказываются аналогично.

Возведение комплексного числа в степень.

Рассмотрим различные степени мнимой единицы i :

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1, & i^4 = -i \cdot i = 1, \\ i^1 = i, & i^5 = 1 \cdot i = i, \\ i^2 = i \cdot i = -1, & i^6 = i \cdot i = -1, \\ i^3 = -1 \cdot i = -i, & i^7 = -1 \cdot i = -i \ldots \end{array}$$

Таким образом, из этой группы последовательных степеней числа i видно, что имеет место периодичность с периодом, равным 4. Учитывая это, можно определить любую степень числа i :

$$\boxed{i^n = i^{4q+r} = \begin{cases} 1, \textit{если } r = 0, \\ i, \textit{если } r = 1, \\ -1, \textit{если } r = 2, \\ -i, \textit{если } r = 3. \end{cases}} \qquad (3.1)$$

Примеры.

3.1. $i^{823} = i^{4 \cdot 205 + 3} = i^3 = -i$;

3.2. $i^{-141} = \dfrac{1}{i^{141}} = \dfrac{1}{i^{4 \bullet 35 + 1}} = \dfrac{1}{i} = -i$.

◆ Возвести комплексное число в любую степень можно последовательным умножением этого числа самого на себя.

Пример 3.3.

Найти $(1+2i)^3$.

Решение:

$$(1+2i)^3 = (1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i) = (1+2i+2i-4)\cdot(1+2i) = (-3+4i)\cdot(1+2i) =$$
$$= -3 - 6i + 4i - 8 = -11 - 2i.$$

З а м е ч а н и е . При возведении комплексного числа в более высокую степень, количество перемножаемых скобок увеличивается, а, значит, процесс возведения комплексного числа в степень усложняется и становится неудобным. Далее будут рассмотрены другие, более удобные способы возведения в какую угодно степень.

Алгебраическая форма комплексного числа.

Определение 4.1 Форма записи $a + bi$ для комплексных чисел называется алгебраической.

Пример 4.1.

Числа, записанные в алгебраической форме:

$$13-i,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -i,\ 5,\ \frac{1}{5}i.$$

Числа, записанные не в алгебраической форме:

$$\frac{13}{i},\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1}{2+3i},\ i^2,\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3.$$

◆ Любое комплексное число можно записать в алгебраической форме.

Примеры.

4.2. $\frac{13}{i}=\frac{13\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-13i}{1}=-13i$;

4.3. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

4.4. $\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$;

4.5. $i^2=-1$.

Геометрическая и векторная интерпретация комплексного числа.

Геометрически комплексные числа представляются точками плоскости в прямоугольно-декартовой системе координат. Числу $z=a+bi$ соответствует точка на плоскости с координатами (a,b) (рис.2). Числу $0+0i$ соответствует начало координат. Все действительные числа $a+0i$ расположены на оси OX, все чисто мнимые числа $0+bi$ расположены на оси OY. Плоскость XOY называется комплексной плоскостью. Ось OX называется действительной осью, ось OY называется мнимой осью.

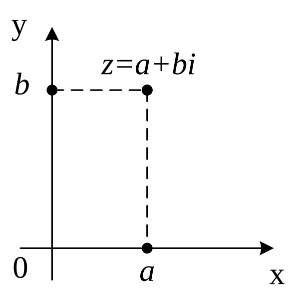


Рис.2

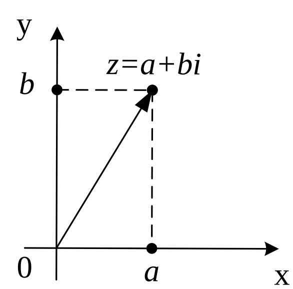


Рис.3

Наряду с геометрическим представлением комплексных чисел существует векторное. В этом случае каждому комплексному $z=a+bi$ ставится в соответствие вектор $\boldsymbol{z}=\{a,b\}$ (рис.3). Числу $0+0i$ соответствует нуль-вектор $\overline{0}=\{0,0\}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Определение 6.1. Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина соответствующего этому числу вектора:

$$\boxed{\,|\, z \,| = |\, a+bi \,| = \sqrt{a^2+b^2}\,} \qquad (6.1)$$

Примеры.

6.1. $z = 2+3i$, $|\, z \,| = |\, 2+3i \,| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

6.2. $z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$, $\quad |z| = \left|\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

◆ Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль $|\, z \,| = r$, соответствует точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в начале координат (рис.4).

Пример 6.3.

Числа $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_4 = -2$ имеют один и тот же модуль $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 2$ (рис.5).

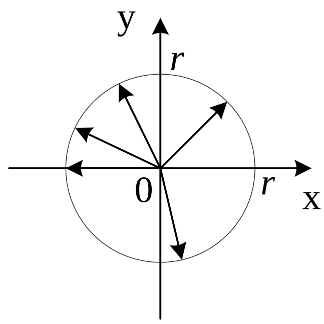


Рис.4

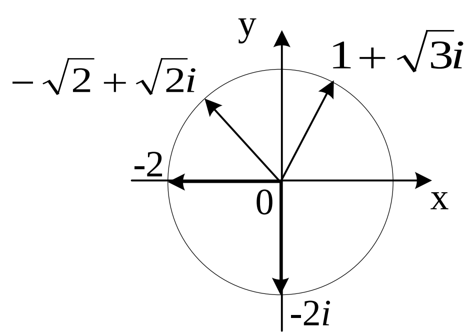


Рис.5

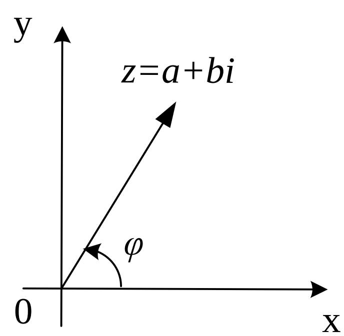


Рис.6

Определение 6.2. Аргументом φ комплексного числа $z = a+bi$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением оси OX и вектором, соответствующим числу z (рис.6).

◆ Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются на $2\pi k$.

Пример 6.4.

Аргументами числа $z = 1+i$ являются углы:

$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, $\quad \varphi_3 = \frac{9\pi}{4} + 2\pi = \frac{17\pi}{4}$ и каждый из углов $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Для обозначения множества всех аргументов принято обозначение:

$$\boxed{\,Arg\ z = \varphi + 2\pi k, k \in Z\,} \qquad (6.2)$$

◆ Из всех значений аргументов выделяется тот, который удовлетворяет условию $0 < \varphi \le 2\pi$, обозначается: *arg z* и называется главным значением аргумента z.

Пример 6.5.

Для комплексного числа $z = 1 + i$:

$arg\, z = \dfrac{\pi}{4}$ – главное значение аргумента,

$Arg\, z = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ – множество значений аргумента.

◆ Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно.

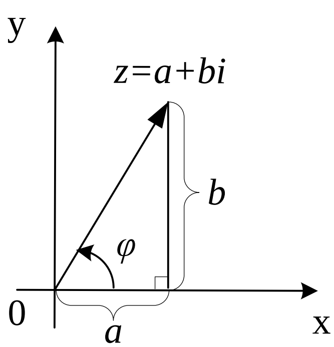


Рис.7

Выразим a и b (из прямоугольного треугольника) через модуль (гипотенузу) числа z и его аргумент (острый угол) (рис.7):

$$a = r \cdot cos\, \varphi,$$

$$b = r \cdot sin\, \varphi.$$

Подставив эти значения в

$$z = a + bi$$

получим:

$$\boxed{z = r(cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi)} \qquad (6.3)$$

Определение 6.3. **Форма записи**

$$z = r(cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\, \varphi = \dfrac{a}{r}$, $sin\, \varphi = \dfrac{b}{r}$ для комплексного числа $z = a + bi$ называется тригонометрической.

Обобщенная запись комплексного числа в тригонометрической форме:

$$\boxed{z = r\left[cos\,(\varphi + 2\pi k) + i\, sin\,(\varphi + 2\pi k)\right], k \in Z} \qquad (6.4)$$

Пример 6.6.

Числа, записанные в тригонометрической форме:

$$2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{3}(cos\, \pi + i\, sin\, \pi),\ cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2}.$$

Числа, записанные в форме, не являющейся тригонометрической:

$$2i(\cos\pi + i\sin\pi),\ \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2},\ i\cos\pi + \sin\pi.$$

Определение 6.4. Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме равны, если $r_2 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

◆ Любое комплексное число можно записать в тригонометрической форме, пользуясь формулами:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}} \qquad (6.5)$$

Пример 6.7.

Найдем тригонометрическую форму числа:

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Решение:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Arg\ z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$arg\ z = \frac{\pi}{4} \text{ (угол I четверти)},$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - \text{тригонометрическая форма числа } z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Операции сложения и вычитания удобно производить над числами, заданными в алгебраической форме. Тригонометрическая же форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной их при умножении, делении и возведении в степень.

Пусть даны комплексные числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

7.1. Умножение.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

◆ Таким образом, при умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]} \qquad (7.1)$$

Пример 7.1.

Найдем произведение чисел

$$z_1 = cos\,75° + i\,sin\,75° \text{ и } z_2 = 2(cos\,15° + i\,sin\,15°).$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot 2 \cdot \left[cos(75° + 15°) + i\,sin(75° + 15°)\right] = 2(cos\,90° + i\,sin\,90°) = 2i.$$

7.2. Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)}{r_2(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)} = \frac{r_1(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)\cdot(cos\,\varphi_2 - i\,sin\,\varphi_2)}{r_2(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)\cdot(cos\,\varphi_2 - i\,sin\,\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot (cos\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 - i\,cos\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 + sin\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2)}{r_2\left(cos^2\,\varphi_2 + sin^2\,\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[(cos\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 + sin\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2) + i(sin\,\varphi_1 \cdot cos\,\varphi_2 - cos\,\varphi_1 \cdot sin\,\varphi_2)\right] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

◆ Модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент равен разности их аргументов:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]} \qquad (7.2)$$

Пример 7.2.

Найдем частное чисел

$$z_1 = cos\,75° + i\,sin\,75° \text{ и } z_2 = 2(cos\,15° + i\,sin\,15°).$$

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left[cos(75° - 15°) + i\,sin(75° - 15°)\right] = \frac{1}{2}(cos\,60° + i\,sin\,60°) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

7.3. Возведение в степень.

Пусть $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$. Возведем z последовательно во вторую, в третью, …, в n-ую степени. Для этого воспользуемся формулой для умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z^2 = r \cdot r \cdot [cos(\varphi + \varphi) + i\,sin(\varphi + \varphi)],$$
$$z^3 = r \cdot r \cdot r \cdot [cos(\varphi + \varphi + \varphi) + i\,sin(\varphi + \varphi + \varphi)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n} \cdot \left[cos\left(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n}\right) + i\,sin\left(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n}\right)\right].$$

Отсюда

$$\boxed{z^n = r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi)} \qquad (7.3)$$

◆ Формула (7.3) называется формулой Муавра. С ее помощью любое комплексное число можно возвести в какую угодно целую степень.

Пример 7.3.

Найдем пятую степень числа
$$z = 3(cos\,\pi + i\,sin\,\pi).$$

Решение:

$$z^5 = 3^5(cos\,5\pi + i\,sin\,5\pi) = 243(cos\,5\pi + i\,sin\,5\pi),$$
но так как $0 < arg\ z \le 2\pi$, то $\varphi = 5\pi - 2\pi - 2\pi = \pi$,
$$z^5 = 243(cos\,\pi + i\,sin\,\pi).$$

7.4. Извлечение корня.

Определение 7.1. Корнем степени n из комплексного числа ω называется число z такое, что $z^n = \omega$ и обозначается: $z = \sqrt[n]{\omega}$.

Пусть
$$z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi),\ \omega = \rho(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha),$$
тогда
$$z^n = \omega \Rightarrow r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi) = \rho(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha).$$

По определению 6.4.: $z^n = \omega$ тогда, когда $r^n = \rho$ и $n\varphi = \alpha + 2\pi k$, $k \in Z$ или $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi}{n}k$, $k \in Z$.

Таким образом,

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right],\ k \in Z} \qquad (7.4)$$

Очевидно, что при k=0,1,2,…,n–1 получим разные значения: $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$. Если k=n, то $z_n = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha}{n}+2\pi\right)+i\,sin\left(\frac{\alpha}{n}+2\pi\right)\right]$, а это число равно z_0; если k>n, то корни комплексного числа будут повторяться: $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$. Следовательно, корень n-ой из комплексного числа имеет n различных значений, имеющих один и тот же модуль, но разные значения аргумента.

Пример 7.4.

Найдем $\sqrt[4]{\omega}$, если

$$\omega = 16\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left[cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 4}+\frac{2\pi k}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 4}+\frac{2\pi k}{4}\right)\right],\ k=0,1,2,3.$$

$$z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{8}+i\,sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_1 = 2\left(cos\frac{5\pi}{8}+i\,sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_2 = 2\left(cos\frac{9\pi}{8}+i\,sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

$$z_3 = 2\left(cos\frac{13\pi}{8}+i\,sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

7.5. Геометрическая интерпретация корней n-ой степени из комплексного числа.

Выше было показано, что корень n-ой степени из комплексного числа имеет n значений, имеющих один и тот же модуль и разные значения аргумента. Так как все числа z_k имеют одинаковые модули, то они соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности с радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ и центром в начале координат (рис.4). Аргументы чисел z_k равны $\alpha+\frac{2\pi k}{n}$, $k=0,1,2,...,n-1$, то есть каждый последующий отличается от предыдущего на $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа ω, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Пример 7.5.

Для числа $\omega = 16\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$ корни четвертой степени имеют вид:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left[cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right],\ k = 0{,}1{,}2{,}3.$$

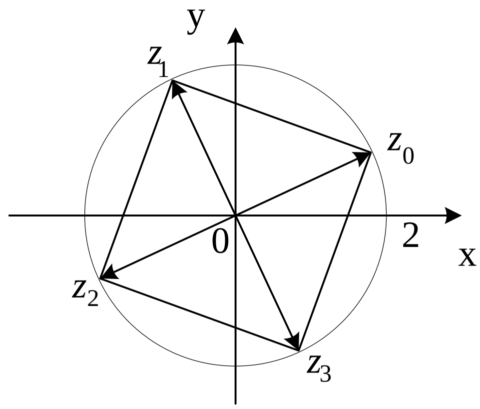


Рис.8

$$z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{8} + i\,sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_1 = 2\left(cos\frac{5\pi}{8} + i\,sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_2 = 2\left(cos\frac{9\pi}{8} + i\,sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

$$z_3 = 2\left(cos\frac{13\pi}{8} + i\,sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

Точки z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность с радиусом, равным 2 и центром в начале координат (рис.8).

◆ Вычисление рациональной степени комплексного числа имеет существенные отличия от нахождения рациональной степени действительного числа:

1) операция возведения комплексного числа в рациональную степень многозначна;
2) равенство $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ верно при условии, что m и n взаимно просты;
3) сокращение дроби в показателе степени приводит к изменению числа корней: $z^{\frac{mk}{nk}} \neq z^{\frac{m}{n}}$ $\left(z \neq z^{\frac{m}{n}}\right)$.
4) Возведение комплексного числа z в рациональную степень $\frac{p}{q}$ не рассматривается, если НОД$(n; p) \neq 1$.

Решение квадратных уравнений.

Решение квадратных уравнений с помощью дискриминанта.

Пусть дано квадратное уравнение

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0} \qquad (10.1)$$

Дискриминант уравнения равен

$$D = b^2 - 4ac.$$

Имеют место три случая:

1) $D > 0$, тогда уравнение имеет **два различных действительных** корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

2) $D = 0$, тогда уравнение имеет **два равных действительных** корня

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a};$$

3) $D < 0$, тогда уравнение имеет **два комплексных сопряженных** корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}.$$

◆ Таким образом, квадратное уравнение всегда имеет два корня. Это утверждение можно распространить и на уравнения высших степеней: уравнение всегда имеет столько корней, какова его степень. Например, уравнение пятой степени будет иметь пять корней.

Пример 10.1.

Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$.

Решение:

а) $x^2 - x - 2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2,\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$, $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$, $D = (-10)^2 - 4 \cdot 29 = 100 - 116 = -16 < 0$, уравнение имеет два комплексных сопряженных корня:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 + 4i}{2} = 5 + 2i,\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i.$$

Теорема Виета.

Определение 10.1. Квадратное уравнение (10.1) называется приведенным, если $a = 1$ и записывается

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \qquad (10.2)$$

Теорема 10.1. (Виета) Сумма корней квадратного уравнения (10.2) равна $-p$, а их произведение равно q:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}} \qquad (10.3)$$

Пример 10.2.

Решить уравнение $x^2 - 4x + 20 = 0$ с помощью теоремы Виета (уравнение имеет комплексные корни).

Решение: по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = 20. \end{cases}$$

Т.к. уравнение имеет комплексные корни, то пусть они имеют вид:

$$x_1 = a + bi \text{ и } x_2 = a - bi .$$

Тогда

$$\begin{cases} (a + bi) + (a - bi) = 4, \\ (a + bi) \cdot (a - bi) = 20. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} 2a = 4, \\ a^2 + b^2 = 20. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $a = 2$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим $b = \pm 4$.Таким образом,

$$x_1 = 2 + 4i \text{ и } x_2 = 2 - 4i$$

3. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЧИСЛА И ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

3.1. Пропорции, проценты. Основные задачи на проценты

Пропорции

Частное от деления двух чисел называется *отношением*.

Обозначается $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

Равенство двух отношений называется *пропорцией*.

Записывается $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Читается: a относится к b также, как c относится к d.

a и b – называются крайними членами пропорции;
c и d – называются средними членами пропорции.

Свойства пропорций

1. Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc.$$

2. В пропорции можно поменять местами крайние члены, или средние члены, или и те и другие одновременно.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

Пример. Масса 18 одинаковых деталей составила 82,8 кг. Какова масса 12 таких деталей?

Решение: обозначим за x массу 12 деталей и составим пропорцию: $\frac{82{,}8}{18}=\frac{x}{12}$;

воспользуемся свойством пропорции: $x=\frac{12\cdot 82{,}8}{18} \Rightarrow x=55{,}2$ кг.

Ответ: масса 12 деталей составляет 55,2 кг.

Две величины называются *пропорциональными*, если при изменении одной из них в несколько раз другая изменяется в такое же количество раз. В этом случае говорят, что между величинами установлена *прямая пропорциональность*.

Две величины называются *обратно пропорциональными*, если при увеличении одной из них в несколько раз, другая уменьшается во столько же раз. В этом случае говорят, что между величинами установлена *обратная пропорциональность*.

Для наглядного представления пропорциональности, в записи краткого условия задачи используют стрелки: в одну сторону для прямой пропорциональности, и в разные стороны – для обратной пропорциональности (таблица 1234).

Таблица 1234. Краткая запись условия задачи

Прямая пропорциональность	***Обратная пропорциональность***
$\begin{array}{cc} a & c \\ \uparrow & \uparrow \\ b & d \end{array}$	$\begin{array}{cc} a & c \\ \uparrow & \downarrow \\ b & d \end{array}$
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$

Пример. На некотором участке газопровода трубы длинной 5 м заменили на трубы длинной 4 м. Сколько нужно новых труб для замены 100 старых?

Решение: Составим краткую запись условия. Т.к. длина труб уменьшилась, то их количество должно увеличиться, поэтому

$$\begin{array}{cc} 5м & 100 \\ \uparrow & \downarrow \\ 4м & x \end{array}$$

Составим пропорцию: $\frac{5}{4}=\frac{100}{x} \Rightarrow x=\frac{5\cdot 100}{4}=125$.

Отношение между пропорциональными величинами называется *коэффициентом пропорциональности*.

Пример. Одна сторона прямоугольника равна 12 м, другая – 16 м. Найти коэффициент пропорциональности сторон прямоугольника.

Решение: отношение сторон прямоугольника равно $\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$.

В этом случае говорят, что величины относятся друг к другу как 4 к 3.

Проценты

Процентом называется сотая часть. Целая часть считается равной ста процентам. Обозначается: 100%.

Простейшие задачи на проценты решаются с помощью составления пропорции: $\frac{A}{100\%}=\frac{a}{x\%}$, где A – целая часть, a – часть от целого, x – процент от целого. В зависимости от того, какой параметр нужно найти, различают три основных задачи на проценты:

1. Найти указанный процент от данного числа (найти a).
2. Найти число по данной величине указанного его процента (найти A).
3. Найти выражение одного числа в процентах другого (найти x).

Примеры. 1) Аэропорт Шереметьево состоит из нескольких терминалов общей площадью 500 тыс. кв. м. Площадь терминала D 172 тыс. кв. м. Какой процент от всей площади аэропорта занимает терминал D?

Решение: всю площадь аэропорта примем за 100%, площадь терминала D обозначим за x%, тогда: $\frac{500}{100} = \frac{172}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 172}{500} = 34{,}4\%$.

Ответ: Терминал D занимает 34,4% (около трети) всей площади аэропорта Шереметьево.

2) Пассажиропоток Шереметьево на внутренних воздушных линиях в 2015 году вырос на 5,6% по сравнению с 2014 годом и достиг 13 млн 809 тыс. пассажиров. Каков был пассажиропоток в 2014 году?

Решение: в 2015 году пассажиропоток вырос, значит 13 809 000 соответствует 105,6% относительно 2014 года. Составим пропорцию: $\frac{A}{100} = \frac{13809000}{105{,}6}$, откуда $A = \frac{13809000 \cdot 100}{105{,}6} \approx 13\,076\,704$.

Ответ: в 2014 году пассажиропоток Шереметьево составил около 13 млн 77 тыс.

3.2. Точные и приближенные числа. Источники погрешностей. Классификация погрешностей

В процессе решения задачи вычислитель сталкивается с различными числами, которые могут быть точными или приближенными. Точные числа дают истинное значение величины числа, приближенные — близкое к истинному, причем степень близости определяется погрешностью вычисления.

Например, в утверждениях: «куб имеет 6 граней»; «на руке 5 пальцев»; «в классе 32 ученика»; «в книге 582 страницы» числа 6, 5, 32, 582—точные. В утверждениях: «ширина дома 14,25 м»; «вес коробки 50 г»; «в лесу около 5000 деревьев» числа 14,25; 50; 5000—приближенные. Измерение ширины дома производится измерительными средствами, которые сами могут быть неточными; кроме того, измеритель при измерении допускает ошибку (погрешность). При взвешивании коробки также допускается ошибка, так как автоматические весы не чувствительны к увеличению или уменьшению веса на 0,5 г. Произвести точно подсчет количества деревьев в лесу невозможно, так как некоторые деревья могут быть подсчитаны дважды; другие совсем не включались в счет; некоторые деревья были отнесены к кустарникам и исключены из счета, и, наоборот, кустарники включены в счет количества деревьев.

Во многих случаях жизни невозможно найти точное значение величины числа и вычислителю приходится довольствоваться его приближенным значением. Кроме того, очень часто вычислитель сознательно заменяет точное значение приближенным в целях упрощения вычислений.

Таким образом, *приближенным числом a* называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях.

При решении той или иной задачи вручную или на вычислительной машине мы получаем числовой результат, который, как правило, не является точным, так как при постановке задачи и в ходе вычислений возникают *погрешности.* Поэтому любая задача, связанная с массовыми действиями над числами, может быть решена стой или иной степенью точности. В связи с этим при постановке задачи должна быть указана точность ее решения, т, е. задана погрешность, максимально допустимая в процессе всех вычислений.

Источниками погрешностей (ошибок) могут быть:

1) неточное отображение реальных процессов с помощью математики, в связи с чем рассматривается не сам процесс, а его идеализированная математическая модель. Не всегда реальные явления природы можно точно отобразить математически. Поэтому принимаются условия, упрощающие решение задачи, что вызывает появление погрешностей. Некоторые задачи невозможно решить в точной постановке и они могут заменяться другими задачами, близкими по результатам первым. При этом также возникают погрешности;

2) приближенное выражение величин, входящих в условие задачи, вследствие их неточного измерения. Это погрешности исходных данных, физических констант, чисел π, e др.;

3) замена бесконечных процессов, пределами которых являются искомые величины, конечной последовательностью действий. Сюда относятся погрешности, образующиеся в результате обрыва какого-то бесконечного процесса на некотором этапе. Например, если в ряде

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

взять определенное конечное количество членов и принять их сумму за результат то мы, естественно, допускаем погрешность;

4) округление исходных данных, промежуточных или окончательных результатов, когда при вычислениях используется лишь конечное число цифр числа.

При отбрасывании младших разрядов числа имеет место погрешность. Пусть, например, число 0,7835478931 требуется записать в ячейку электронной вычислительной машины. Разрядная сетка машины допускает, например, запись семизначного десятичного числа. Поэтому данное число нужно округлить так, чтобы в нем осталось не более семи знаков после запятой. Тогда округленное число примет следующий вид: 0,7835479;

5) кроме указанных выше случаев, погрешности могут появляться в результате действий над приближенными числами. В этом случае погрешности исходных данных в какой-то мере переносятся на результат вычислений.

Полная погрешность является результатом сложного взаимодействия всех видов погрешностей. При решении конкретных задач те или иные погрешности могут отсутствовать или мало влиять на образование полной погрешности. Однако для полного анализа погрешностей необходимо учитывать все их виды.

Во всех случаях полная погрешность не может превышать по своей абсолютной величине суммы абсолютных величин всех видов погрешностей, но обычно она редко достигает такой максимальной величины.

Таким образом, погрешности можно подразделить на три большие группы:

1) *исходные,* или *неустранимые,* к которым относятся погрешности, возникающие в результате приближенного описания реальных процессов и неточного задания исходных данных, а также погрешности, связанные с действиями над приближенными числами. Эти погрешности проходят через все вычисления и являются неустранимыми;

2) погрешности *округления* (зарождающиеся), которые появляются в результате округления исходных данных, промежуточных и окончательных результатов;

3) *остаточные,* возникающие в результате замены бесконечных процессов конечной последовательностью действий.

Оценка погрешности может быть произведена: с помощью абсолютной погрешности; с помощью относительной погрешности; с помощью остаточного члена; с помощью статистических оценок.

При работе с приближенными величинами вычислитель должен уметь:

а) давать математические характеристики точности приближенных величин;

б) зная степень точности исходных данных, оценить степень точности результатов;

в) брать исходные данные с такой степенью точности, чтобы обеспечить заданную точность результата. В этом случае не следует слишком завышать точность исходных данных, чтобы избавить вычислителя от бесполезных расчетов;

г) уметь правильно построить вычислительный процесс, чтобы избавить его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точные цифры результата.

Абсолютная и относительная погрешности

Выше было дано определение приближенного числа: *приближенным числом а* называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее его в вычислениях.

Если $a<A$, то говорят, что число a является приближенным значением числа A *по недостатку;* если $a > A$ — приближенным значением *по избытку.*

Разность между точным числом A и его приближенным значением a составляет *ошибку,* или *погрешность*. Как правило, знак ошибки вычислителя не интересует, поэтому пользуются абсолютной ошибкой, или абсолютной погрешностью.

Абсолютная величина разности между точным числом A и его приближенным значением a называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа a:

$$\Delta_a = |A - a|. \tag{1}$$

Здесь возможны два случая.

1. Точное число A нам известно. Тогда абсолютная погрешность приближенного числа легко находится по формуле (1).

Пример 1. Пусть A = 784,2737, a = 784,274; тогда абсолютная погрешность $\Delta_a = | A — a | = |784{,}2737—784{,}274| = 0{,}0003$.

2. Точное число A нам неизвестно, тогда вычислить абсолютную погрешность по формуле (1) нельзя. Поэтому пользуются понятием границы абсолютной погрешности, удовлетворяющей неравенству

$$|A—a| < \Delta^*_a.$$

Граница абсолютной погрешности, т. е. число, заведомо превышающее абсолютную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной абсолютной погрешностью.*

Следовательно, если Δ^*_a — предельная абсолютная погрешность, то

$$\Delta_a = |\mathbf{A} - a| < \Delta^*_a. \tag{2}$$

Значение точного числа A всегда заключено в следующих границах;

$$a — \Delta^*_a < \mathbf{A} < a + \Delta^*_a \tag{3}$$

Выражение $a — \Delta^*_a$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta^*_a$ — приближение числа A по избытку. Значение числа A записывается так:

$$A = a \pm \Delta^*_a \tag{3'}$$

Пример 2. Число 45,3 получено округлением. Точное значение числа неизвестно, однако, пользуясь правилами округления чисел, можно сказать, что абсолютная погрешность не превышает (меньше или равна) 0,05

Следовательно, границей абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешностью) можно считать 0,05. Записывают это так: 45,3 (±0,05). Скобки часто опускают, так что запись 45,3 ± 0,05 означает то же самое. Двойной знак ± означает, что отклонение приближенного значения числа от точного возможно в обе стороны. В качестве границы абсолютной погрешности берут по возможности наименьшее число.

Пример 3. При измерении длины отрезка оказалось, что ошибка, допущенная нами, не превышает 0,5 см; тем более она не превышает 1, 2 или 3 см. Каждое из этих чисел можно считать границей абсолютной погрешности. Однако нужно указать наименьшую из них, так как чем меньше граница абсолютной погрешности, тем точнее выражается приближенное значение числа. В записи приближенного числа, полученного в результате измерения, обычно отмечают его предельную абсолютную погрешность.

На практике часто применяют выражения типа: «с точностью до 0,01»; «с точностью до 1 см» и т. д. Это означает, что предельная абсолютная погрешность соответственно равна 0,01; 1 см и т. д.

Пример 4. Если длина отрезка l = 184 см измерена с точностью до 0,05 см, то пишут l = 184 см ± 0,05 см. Здесь предельная абсолютная погрешность Δ^*_l = 0,05 см, а точная величина длины отрезка заключена в следующих границах: 183,95 см < l < 184,05 см.

По абсолютной и предельной абсолютной погрешностям нельзя судить о том, хорошо или плохо произведено измерение.

Пример 5. Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты: l = 28,4 ± 0,1 (см) и L — 110,3 ± 0,1 (см). И в первом, и во втором случае предельная абсолютная погрешность составляет 0,1 см. Однако второе измерение было произведено более точно, чем первое.

Для того чтобы определить качество произведенных измерений, необходимо определить, какую долю составляет абсолютная или предельная абсолютная погрешность от измеряемой величины, В связи с этим вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности к модулю точного числа A ($A \neq 0$), т. е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}. \quad (4)$$

Отсюда

$$\Delta_a = \delta_a |A| \quad (4')$$

Число δ^*_a, заведомо превышающее относительную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной относительной погрешностью:*

$$\delta_a < \delta^*_a \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\Delta_a \leq |A| \delta^*_a$$

Из определения предельной абсолютной погрешности следует, что $\Delta_a \leq \Delta^*_a$ Тогда можно записать

$$\Delta^*_a = |A| \delta^*_a \quad (6)$$

и за предельную относительную погрешность приближенного числа a можно принять

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|A|} \tag{7}$$

Учитывая, что A, как правило, неизвестно и что $A \approx a$, равенства (6) и (7) можно записать так:

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}, \tag{6'}$$

Возвращаясь к примеру 5, найдем предельные относительные погрешности измерения книги и стола.

$$\delta_l^* = \frac{0.1cm}{28.4cm} \approx 0.0035$$, или 0.35 %,

$$\delta_l^* = \frac{0.1cm}{110,3cm} \approx 0.0009$$, или 0,09%.

Таким образом, измерение стола было произведено намного точнее.

Очевидно, что как относительная погрешность, так и предельная относительная погрешность представляют собой отвлеченные числа, не зависящие от единиц, в которых выражаются результаты измерений,

Пример 6. Определить (в процентах) предельную относительную погрешность приближенного числа a = 35,148 ± 0,00074

Решение. Воспользуемся формулой (7). Тогда

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} = \frac{0.00074}{35.148} \approx 0{,}000021$$

Пример 7. Определить предельную абсолютную погрешность приближенного числа a = 4,123, если δ^*_a = 0,01%.

Решение. Запишем проценты в виде десятичной дроби и для определения предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой (6'); тогда

$\Delta_a^* = \delta_a^* |a|$ = 4,123 • 0,0001 = 0,00042.

Пример 8. Определить, какое равенство точнее: $a = \frac{13}{19} \approx 0.684$ или $b = \sqrt{51} \approx$ 7,21?

Решение. Для нахождения предельных абсолютных погрешностей берем числа a и b с большим числом десятичных знаков: 13/19 ≈ 0,68421; $\sqrt{51} \approx$ 7,2111. Определяем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

Δ_a^* = |0,68421—0,684 | < 0,00022; Δ_b^* = |7,2111—7,21 | < 0,0012.

Находим предельные относительные погрешности:

$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}$ = 0,00022/0,684 ~ 0,00033 = 0,033%; $\delta_b^* = \frac{\Delta_b^*}{|b|}$ = 0,0012/7,21 ~ 0,00017 = 0,017%.

Второе равенство является более точным, поскольку $\delta *_b < \delta *_a$.

Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра

Системой счисления, или *нумерацией,* называется совокупность правил, служащих для наименования и обозначения чисел. *Цифрами* называются условные знаки, используемые при обозначении чисел. При записи чисел в десятичной системе счисления пользуются десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Десятичная система является *позиционной:* значение каждой цифры в числе зависит от ее положения среди других цифр этого числа. Так, в числе 7777, 77 имеются шесть цифр 7, Но все они имеют разные значения. Значение первой слева цифры — 7000, второй — 700, третьей — 70, четвертой — 7, пятой — 0,7, шестой — 0,07, Число 7777,77 является сокращенной записью следующей суммы:

$$7777{,}77 = 7 \,.\, 10^3 + 7 \,.\, 10^3 + 7 \bullet 10^1 + 7 \,.\, 10^\circ + 7 \,.\, 10^{-1} + 7\ 10^{-2},$$

В десятичном числе единица каждого разряда равна десяти единицам предыдущего разряда. Вообще, всякое десятичное положительное число *a* может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + .. \quad (1)$$

где α_i — цифры числа $(i = 1, 2,.., n\ldots)$, причем $\alpha_1 \neq 0$, а m — старший десятичный разряд числа *a.*

Значение единицы соответствующего разряда есть *цена* разряда. Так, цена первого (слева) разряда приближенного числа *a* есть 10^m, *n-го* -- 10^{m-n+1}.

При решении задач очень часто ставится условие: вычислить результат с точностью до одной десятой, одной сотой и т. д. Создается впечатление, что точность вычислений определяется числом десятичных знаков после запятой. Это неправильно, так как число десятичных знаков зависит от единицы, выбранной для измерения.

Определяющим точность вычисления является не число десятичных знаков, а число значащих цифр результата

Значащими цифрами приближенного числа *a* называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности. Нули, стоящие левее первой отличной от нуля цифры, н е я в л я ю т с я значащими цифрами.

Пример 1. Числа 0,001405 и 6,0300 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр. Нуль, записанный в конце десятичной дроби, всегда значащая цифра (иначе его просто бы не писали). В данном примере в числе 6,0300 последний нуль показывает, что число задано с точностью до десятитысячных.

При написании целых чисел нули справа могут быть в одних случаях значащей цифрой, в других — незначащей. Если число 835 000 задано с точностью до единиц, то все три нуля справа—значащие цифры. Если же это число задано с точностью до сотен, то последние два нуля — незначащие цифры, а нуль в разряде сотен—значащая цифра,

Пример 2. Число 399 837 округлили до тысяч, получили 400 000. Нуль в разряде тысяч является значащей цифрой, так как стоит в разряде точности. Все остальные цифры стоящие левее нуля, находящегося в разряде точности, являются также значащими. Последние три нуля — незначащие цифры.

Для того чтобы по записи числа можно было бы определить, являются ли крайние правые нули значащими или нет, рекомендуется числа представлять в виде произведения двух сомножителей, например: $400 \cdot 10^3$, или $40{,}0 \cdot 10^4$, или $4{,}00 \cdot 10^s$. Последняя форма записи, когда запятая поставлена после первой слева значащей цифры, называется *нормальной* и является предпочтительной. В таком представлении количество значащих цифр числа равно количеству значащих цифр первого сомножителя.

Однако точность приближенного числа зависит не от того, сколько в этом числе значащих цифр, а от того, сколько значащих цифр заслуживают доверия, т. е. от количества верных значащих цифр.

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$ содержит *n верных значащих цифр в узком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т. е. если выполняется неравенство

$$\Delta_a < 0{,}5.10^{m-n+1} \tag{2}$$

Если это неравенство не выполняется, то цифру a_n называют *сомнительной.* Очевидно, что если цифра a_n — верная, то и все предшествующие ей цифры тоже верные. Таким образом, среди верных цифр всегда можно указать последнюю.

Пример 3 Для точного числа A = 17,976 число a = 17,98 является приближением с четырьмя верными знаками в узком смысле, так как $\Delta_a = |A - a| = 0{,}004 < 0{,}5 \cdot 0{,}01$.

В математических таблицах все помещенные значащие цифры — верные. Так, в известных таблицах В, М. Брадиса значения синуса даны с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,5 • 10~^{4}, т. е. с четырьмя верными значащими цифрами в узком смысле. В последнее время стали использоваться таблицы (таблицы различных физических величин, экспериментально составленные таблицы), в которых абсолютные погрешности чисел не превосходят единицы последнего разряда.

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$.

содержит *n верных значащих цифр в широком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т, е, если выполняется неравенство

$$\Delta_a < 1 \bullet 10^{m-n+1} \tag{3}$$

Пример 4. Для точного числа A = 17,976 число a = 17,97 является приближенным **G** четырьмя верными цифрами в широком смысле, так как

$$\Delta_a = |A — a| = 0,006 < 1 \bullet 0,01..$$

Неравенства (2) и (3) можно записать в виде $\Delta_a < \omega \bullet 10^{m-n+1}$, где параметр ω, принимающий значения 0,5 < ω < 1, указывает на характер проводимых вычислений. Если приближенные числа появляются в результате вычислений по формулам с точными значениями исходных данных (например, при составлении таблиц трансцендентных функций), иными словами, когда можно практически достигнуть любой заданной точности, то выгоднее брать меньшее значение параметра ω, т. е. ω= 0,5.

Если же приближенные числа получаются в результате вычислений с недостаточно точными исходными данными, то параметр ω принимается равным единице. В этом случае малые значения параметра ω связаны с необходимостью производить округления, которые снижают точность результатов и поэтому являются невыгодными. Если указано, что цифры приближенного числа верные и ω = 0,5, то это означает, что цифры числа верны в узком смысле; если же ω = 1, то в широком смысле.

Пример 5. Сколько верных значащих цифр содержит приближенное число а = 85,267 ± 0,0084: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле?

Решение. 1) Из условия видно, что погрешность Δ_a = 0,0084 < 0,05. Следовательно, верными в узком смысле будут цифры 8, 5, 2.

2) Поскольку Δ_a= 0,0084 < 0,01, верными в широком смысле будут цифры 8, 5, 2, 6

Пример 6. Определить предельные абсолютные погрешности приближенных чисел a = 96,387 и b = 9,32, если они содержат только верные цифры в узком и широком смысле соответственно.

Реш**е**ни**е.** 1) Так как для числа a = 96,387 последняя цифра 7, стоящая в разряде тысячных долей, является верной значащей цифрой в узком смысле, то Δ_a < 0,5 0,001, т. е. Δ_a< 0,0005, или Δ^*_a= 0,0005. Тогда число a можно записать так: 96,387 ± 0,0005.

2) Последняя цифра приближенного числа b = 9,32 стоит в разряде сотых долей. Так как это число содержит верные цифры в широком смысле, то,

следовательно, $\Delta_b < 1 \cdot 0{,}01$, т. **е.** $\Delta_b < 0{,}01$, или $\Delta^*_b| = 0{,}01$. Число *b* можно записать так: 9,32 ± 0,01.

Округление чисел

В приближенных вычислениях часто приходится округлять числа как приближенные, так и точные, т. е. отбрасывать одну или несколько последних цифр и при необходимости заменять их нулями. При округлении числа мы заменяем его приближенным числом с меньшим количеством значащих цифр, в результате чего возникает погрешность округления. Чтобы эта погрешность была минимальной, нужно придерживаться некоторых правил округления (по дополнению).

П р а в и л о I. *Если первая слева из отбрасываемых цифр больше* 5, *то последняя из сохраняемых цифр усиливается, т.е. увеличивается на единицу. Усиление производится и тогда, когда первая слева из отбрасываемых цифр равна* 5, *а за ней следуют отличные от нуля цифры.*

Пример 1. Округляя до десятых долей число 73,473, получим 73,6. Последняя из оставшихся цифр усилена, так как 7 > 5.

П р а в и л о II. *Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то последняя из оставшихся цифр не усиливается, т. е. остается без изменения.*

Пример 2. Округляя до сотых долей число 73,473, получим 73,47,

П р а в и л о III. *Если первая слева из отброшенных цифр равна* 5 *и за ней не следуют отличные от нуля цифры, то последняя оставшаяся цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная* (п р а в и л о   ч е т н о й   ц и ф р ы).

Пример 3. Округляя число 5,785 до сотых долей, получаем 5,78. Усиления не делаем, так как последняя сохраняемая цифра 8 — четная. Округляя число 5,775 до второго десятичного знака, имеем 5,78. Последняя сохраняемая цифра 7 увеличивается на единицу, поскольку она нечетная.

При применении правила III к округлению одного числа мы фактически не увеличиваем точность вычислений, однако при многочисленных округлениях избыточные числа встречаются примерно так же часто, как и недостаточные. Происходит взаимная компенсация погрешностей, результат оказывается более точным.

Таким образом, при применении выше рассмотренных правил округления *абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.*

Если точное число *A* округляется до *n* значащих цифр по правилу дополнения, то получаемое приближенное число *a* имеет абсолютную погрешность, равную погрешности округления. В этом случае приближенное число *a* имеет *n* верных значащих цифр в узком смысле.

Пример 4. Округляя число $A = 26{,}837$ до трех значащих цифр, получим $a = 26{,}8$, откуда

$$\Delta_a = | A — a | = 1\ 26{,}837 — 26{,}81\ = 0{,}037 < 0{,}05,$$

т. е. число a имеет три верные значащие цифры в узком смысле.

При округлении приближенного числа a_1 получаем новое приближенное число a_2, абсолютная погрешность которого складывается из абсолютной погрешности первоначального числа a_1 и погрешности округления, т. е.

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр} \tag{1}$$

Пример 5. Округлить сомнительные цифры числа a_1 = 34 124 (± 0,021). Определить абсолютную погрешность результата.

Р е ш е н и е. Приближенное число a_1 имеет три верные цифры в узком смысле. 3, 4**,** 1, так как Δ_{a_1} = 0,021 < 0,05 Применяя правила округления, найдем приближенное значение a_2, сохранив десятые доли: a_2 = 34,1. Теперь получаем $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ кр = 0,021 + 0,024 = 0,045 < 0,05.

Таким образом, все значащие цифры числа верные (в узком смысле), т. е. a_2= 34,1.

Однако при округлении приближенного числа a_1 имеющего n верных значащих цифр (в узком смысле), до n значащих цифр может оказаться, что округленное число a_2 будет иметь n верных значащих цифр в широком смысле.

Пример 6. Приближенное число a_1= 15,3654 ± 0,0018 имеет четыре верные значащие цифры в узком смысле (1, 5, 3, 6), так как Δ_{a_1} 0,0018 < 0,005. При округлении до четырех значащих цифр получим a_2 = 15,37 и $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ = 0,0018+0,0046 = 0,0064.

Очевидно, что 0,005 < 0,0064 < 0,01. Следовательно, число 15,37 ± 0,0064 имеет четыре верные цифры в широком смысле.

Пример 7. Округлить сомнительные цифры числа a_1= 26,7245 ± 0,0026, оставив верные знаки в узком смысле, Определить абсолютную погрешность результата.

Р е ш е н и е. По условию Δ_{a_1} = 0,0026 < 0,005, следовательно, в числе 26,7245 верными в узком смысле являются цифры 2, 6, 7, 2. Используя правила округления, найдем приближенное значение a_2, сохранив сотые доли: a_2 = 26,72. Далее, имеем

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр} = 0{,}0026 + 0{,}0045 = 0{,}0071.$$

Полученная погрешность больше 0,005 (0,005 < 0,0071), поэтому уменьшим число цифр в приближенном числе до трех: a_3 = 26.7. Находим

$$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр} = 0{,}0026+0{,}0245 = 0{,}0271,$$

т. е. Δ_{a_3} < 0,05. Следовательно, оставшиеся три цифры верны в узком смысле.

Пример 8. Округлить сомнительные цифры числа a^1 = 22,7314, оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если δ_{a_1} =0,2%.

Р е ш е н и е . Запишем δ_{a_1} в виде десятичной дроби δ_{a_1} = 0,002 и определим Δ_{a_1} по формуле (6')

$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 |$=22,7314 • 0,002 = 0,0455. Так как Δ_{a_1} = 0,0455 < 0,05, то верными в этом числе* будут три цифры: 2, 2, 7. Округлим число 22,7314, сохранив в нем десятые доли: a_2 = 22,7. Тогда $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ = 0,0455+0,0314 = 0,0769.

Поскольку полученная погрешность больше 0,05, уменьшаем число цифр в приближенном числе до двух: a_3 = 23; тогда

$$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр} == 0{,}0455+0{,}2686 = 0{,}3141,$$

т. е. Δ_{a_3} < 0,5. Таким образом, в полученном округленном числе 23 обе цифры являются верными в узком смысле.

Пример 9. Округлить сомнительные цифры числа a^1 = 5,273, оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если δ_{a_1} = 0,1%.

Р е ш е н и е . Находим

$$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 | = 5{,}273\text{-}0{,}001 = 0{,}0053.$$

В числе ***a-i*** верными в широком смысле являются три цифры (5, 2, 7), поэтому округляем его до трех значащих цифр: o_2 = 5,27; отсюда

$$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 | = 0{,}0053 + 0{,}003 = 0{,}0083 < 0{,}01.$$

Следовательно, округленное число 5,27 имеет три верные цифры в широком смысле.

Связь между числом верных знаков и погрешностью числа

Абсолютная погрешность приближенного числа связана с числом верных знаков соотношением

$$\Delta_a < \omega \bullet 10^{m-n+1}, \tag{1}$$

что следует из определения верной значащей цифры.

В какой же зависимости от числа верных значащих цифр находится относительная погрешность? Запишем приближенное число

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + ... \tag{2}$$

$\alpha_1 \neq 0$ все цифры которого при данном выборе параметра ω верные (0,5 < ω < 1).

Разделив обе части неравенства (1) на $| a |$, получим

$$\frac{\Delta_a}{|a|}<\frac{\omega\cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_1\cdot 10^m+\alpha_2\cdot 10^{m-1}+\alpha_3\cdot 10^{m-2}+..+\alpha_n\cdot 10^{m-n+1}+...}\leq\frac{\omega\cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_1\cdot 10^m}=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}}$$

т. е.

$$\delta_a\leq\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}} \tag{3}$$

где $\alpha_1\neq 0$ — первая значащая цифра числа; *n* — количество верных значащих цифр.

За предельную относительную погрешность можно принять

$$\delta^*{}_a=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}} \tag{4}$$

Пример 1**.** Какова предельная относительная погрешность приближенного числа а = 4,176, если **оно** имеет только верные цифры в узком смысле?

Р е ш е н и е**.** Так как **в** числе 4,176 все четыре цифры верны в узком смысле, то выбираем ω = 0,5. По формуле (4) находим предельную относительную погрешность

$$\delta^*{}_a=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}} = 0{,}000125 = 0{,}0125\%,$$

Заметим, что предельную относительную погрешность числа *а* можно найти, пользуясь формулой $\Delta_{a_1}=\delta_{a_1}|\,a^1\,|$. Так как в данном числе *а* все цифры верны в узком смысле, то Δ_{a_1} = 0,0005. Тогда

$$\delta^*_a = 0{,}0005/4{,}176 = 0{,}000120 = 0{,}0120\%.$$

Как видим, разница невелика, но применение формулы (4) несколько упрощает вычисление $б_0$.

Пример 2. Какова предельная относительная погрешность числа *а* = 14,278, если оно имеет только верные цифры в широком смысле?

Р е ш е н и е . Так как все пять цифр числа верны в широком смысле, то со = 1, Тогда

$$\delta^*{}_a=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}} = 0{,}0001 = 0{,}01$$

Пример 3. Со сколькими верными десятичными знаками в узком смысле надо взять $\sqrt{18}$, чтобы погрешность не превышала 0,1%?

Р е ш е н и е . Здесь а $\sqrt{18}\approx 4$, $\delta^*{}_a\leq 0{,}1$; ω = 0,5,

имеем $\delta^*{}_a=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{n-1}}\leq$ 0,001, откуда

125 <10, n>3 + lg l,25,

т. е. *n* > 3, где *n* — наименьший целочисленный аргумент.

3.3. Ошибки арифметических операций

Погрешности суммы и разности

Теорема. *Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.*

Доказательство. Пусть A = $X_1 + X_2 + ... + X_n$ — сумма точных чисел, причем величины X_t могут быть любого знака; $a = x_1 + x_2 + ... + x_n$ сумма приближенных значений этих чисел. Абсолютные погрешности их соответственно равны $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ...\Delta_{x_n}$. Вычитая из точного значения суммы приближенное ее значение, имеем

$$A - a = X_1 - x_1 + X_2 - x_2 + X_n - x_n$$

Переходя к модулям, получим

$| A - a | \leq | X_1 - x_1 | + | X_2 - x_2 | + | X_n - x_n |$

Следовательно,

$$\Delta_a \leq \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + ... + \Delta_{x_n}. \quad (1)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.*

Действительно, имеем

$\Delta*_{x_1} \leq \Delta*_{x_1}, \Delta_{x_2} \leq \Delta*_{x_2}, ...\Delta_{x_n} \leq \Delta*_{x_n}$ Подставляя значения предельных абсолютных погрешностей в неравенство (1), мы еще более усилим его:

$$\Delta_a \leq \Delta*_{x_1} + \Delta*_{x_2} + ... + \Delta*_{x_n},$$

или

$$\Delta*_a = \Delta*_{x_1} + \Delta*_{x_2} + ... + \Delta*_{x_n} \quad (2)$$

Из последней формулы следует, что предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых, так как увеличение точности за счет остальных слагаемых невозможно. Поэтому, чтобы не производить лишних вычислений, не следует сохранять лишние знаки и в более точных слагаемых.

При сложении чисел различной абсолютной точности рекомендуется поступать следующим образом:

1) выделить число (или числа) наименьшей абсолютной точности (т. е. число, имеющее наибольшую абсолютную погрешность);

2) наиболее точные числа округлить таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (т. е. оставить один запасной знак);

3) произвести сложение, учитывая все сохраненные знаки;

4) полученный результат округлить на один знак.

Пример 1. Сложить несколько приближенных чисел:

a = 0,1732 + 17,45 + 0,000333 + 204,4 + 7,25 + + 144,2 + 0,0112 + 0,634 + 0,0771. В каждом из приведенных чисел верны все значащие цифры (в широком смысле).

Р е ш е н и е , Выделяем два числа наименьшей точности: 204,4 и 144,2. Оба они верны с точностью до 0,1. Следовательно, остальные числа следует округлить с точностью до 0,01. Округлим и сложим эти числа: *a=374.19*

Округляя полученное число до 0,1, окончательно получим a = 374,2. Оценим точность результата. Для этого найдем полную погрешность, которая состоит из трех слагаемых)

1) суммы предельных погрешностей исходных данных

Δ_1 = 0,0001 + 0,01 + 0,000001 + 0,1 + 0,01 + 0,1 + 0,0001 + 0,001 + + 0,0001 = 0,221301 < 0,222s

2) абсолютной величины суммы ошибок (с учетом их знаков) округления слагаемых

Δ_2 = | 0,0032+0,000333+0,0012 + 0,004—0,0029| = 0,005833 < 0,006;

3) заключительной погрешности округления результата Δ_3 = 0,010. Следовательно,

$$\Delta_a = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0{,}222 + 0{,}006 + 0{,}010 = 0{,}238 < 0{,}3.$$

Искомая сумма есть 374,2 ± 0,3.

Таким образом, убеждаемся, что окончательная погрешность не меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых (действительно, 0,3 > 0,1).

Определим предельную относительную погрешность суммы нескольких приближенных чисел.

Здесь следует различать два случая: 1) все слагаемые имеют одинаковые знаки; 2) слагаемые имеют разные знаки.

Рассмотрим п е р в ы й с л у ч а й . Пусть $a = x_1 + x_2 + ... + x_n$, где приближенные числа x_t $(i = 1, 2, n)$ имеют соответственно предельные абсолютные погрешности $\Delta*_{x_1}, \Delta*_{x_2}, ...\Delta*_{x_n}$. Положим для простоты x_i ***Xi*** > 0;

тогда $\delta^*{}_a = \dfrac{\Delta^*_a}{a}$

Но, согласно формуле (2)

$$\Delta*_a = \Delta*_{x_1} + \Delta*_{x_2} + ... + \Delta*_{x_n}$$

Подставляя Δ_a в формулу (3) и заменяя a суммой $\sum x_i$ получим

$$\delta_a^* = \frac{\sum \Delta_{xi}^*}{\sum x_i} \tag{3'}$$

Так как $\Delta*_{x_i} = x_i \delta_{x_i}^*$, то

$$\delta_a^* = \frac{\sum x_i \delta_{x_i}^*}{\sum x_i} \tag{3''}$$

Обозначим через $\delta_{\max}^*$ и $\delta_{\min}^*$ наибольшее и наименьшее из чисел $\delta_{x_i}^*$; тогда имеем

$$\delta_a^* = \frac{\sum x_i \delta_{x_i}^*}{\sum x_i} \le \frac{\delta_{\max}^* \sum x_i}{\sum x_i} = \delta_{\max}^*$$

Аналогично можно получить, что $\delta_a^* \ge \delta_{\min}^*$ Таким образом,

$$\delta_{\max}^* \ge \delta_a^* \ge \delta_{\min}^* \tag{4}$$

Следовательно, *предельная относительная погрешность суммы слагаемых одного знака заключена между наименьшей и наибольшей предельными относительными погрешностями слагаемых.*

Рассмотрим в т о р о й с л у ч а й (разность). Пусть $x > 0$, у > 0 и а = $x - y$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, получим

$$\delta^*{}_a = \frac{\Delta_a^*}{a} = \frac{\Delta_x^* + \Delta_y^*}{|x - y|} \tag{5}$$

Таким образом, если числа x и y мало отличаются друг от друга, то даже при малых погрешностях Δ_x^* и Δ_y^* величина предельной относительной погрешности разности может оказаться значительной.

Пример 3. Пусть x = 5,125, y = 5,135; здесь Δ_x^* = 0,0005, Δ_y^* = 0,0005, $\delta^*{}_x \approx \delta^*{}_y \approx$ 0,01%. Предельная же относительная погрешность разности $a = x - y$ равна

$$\delta^*{}_a = \frac{0.0005 + 0.0005}{0.01} 100 = 10\%$$

Очевидно, что в результате вычитания двух близких чисел может произойти большая потеря точности. Чтобы не допустить этого, следует попытаться так преобразовать вычислительную схему, чтобы малые разности величин вычислялись непосредственно.

Пример 4. Найти разность u = $\sqrt{6,27} - \sqrt{6.26}$ с тремя верными знаками.

Р е ш е н и е . Возьмем $\sqrt{6,27}, \sqrt{6.26}$ с достаточно большим количеством верных значащих цифр, так как при вычитании близких друг другу чисел первые несколько цифр могут пропасть:

$$\sqrt{6,27} = 2{,}503997...; \ \sqrt{6.26} = 2{,}501999... .$$

Получим

u=$\sqrt{6,27} - \sqrt{6.26}$ = 0,001998 ≈ 0,00200 = 2,00$\cdot 10^{-3}$

Однако вычислительную схему можно изменить и взять квадратные корни только стремя верными знаками:

$$\sqrt{6,27} - \sqrt{6.26} = \frac{(\sqrt{6,27} - \sqrt{6.26})\sqrt{6,27} + \sqrt{6.26}}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6.26}}$$

$$= \frac{6,27 - 6.26}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6.26}}$$

Это выражение, кроме разности данных чисел, никаких других разностей не содержит. В результате получаем

$$u \approx \frac{0.01}{2.50 + 2.50} = 2.00 \cdot 10^{-3},$$

как и прежде.

Однако преобразовать вычислительную схему не всегда возможно. Поэтому при вычитании близких друг другу чисел необходимо их брать с достаточным числом запасных верных знаков (если это возможно). Если известно, что первые m значащих цифр могут пропасть, а результат нужно получить с n верными значащими цифрами, то исходные данные необходимо брать с $m + n$ верными значащими цифрами, как было сделано в примере 4.

Погрешность произведения. Число верных знаков произведения

Ранее были получены формулы для определения абсолютной погрешности алгебраической суммы нескольких приближенных чисел.

Для нахождения абсолютной погрешности произведения $u = = x_1 \ x_2...x_n$ и частного $u = x/y$ также можно получить соответствующие формулы, однако они являются более сложными, и поэтому абсолютную погрешность произведения и частного удобно находить через относительную погрешность, используя формулу $\Delta_u = |u|\,\delta_u$. В связи с этим выведем формулу для определения относительной погрешности произведения.

Погрешность произведения.

Теорема. *Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть

$$u = x_1 x_2 \dots x_n \qquad (1)$$

Для определенности положим, что приближенные числа положительны и имеют абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots \Delta_{x_n}$ соответственно.

Для оценки погрешности произведения прологарифмируем выражение (1):

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n . \qquad (2)$$

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел (2) не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т.е.

$$\Delta_{\ln u} \le \Delta_{\ln x_1} + \Delta_{\ln x_2} + \dots + \Delta_{\ln x_n} \qquad (3)$$

Используя приближенную формулу

$$\Delta_{\ln u} \approx \frac{\Delta_u}{u} \qquad (4)$$

получим

$$\frac{\Delta_u}{u} \le \frac{\Delta_{x_1}}{x_1} + \frac{\Delta_{x_2}}{x_2} + \dots + \frac{\Delta_{x_n}}{x_n} \qquad (5)$$

откуда

$$\delta_u \le \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n} \qquad (6)$$

Заметим, что знак модуля в выражении (5) опущен, так как было принято, что $x_i > 0$
$(i = 1, 2, \dots n)$.

Формула (6), очевидно, остается верной и в том случае, если x_t имеют разные знаки.

С л е д с т в и е . *Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.*

Действительно,

$$\delta_{x_i} \le \delta^*_{x_i} \qquad (7)$$

Подставляя значения предельных относительных погрешностей в неравенство (6), мы еще более усилим его, т. е.

или

$$\delta_u \le \delta^*_{x_1} + \delta^*_{x_2} + \dots + \delta^*_{x_n} . \qquad (8)$$

Если все сомножители, кроме одного, являются точными числами, то из формулы (8) следует, что предельная относительная погрешность произведения совпадает с предельной относительной погрешностью приближенного сомножителя. Таким образом, если приближенным числом является лишь значение множителя x, то

$$\delta^*_u = \delta^*_{x_1} \qquad (9)$$

З а м е ч а н и е . При умножении приближенного числа x на точный сомножитель k предельная относительная погрешность произведения равна предельной относительной погрешности приближенного числа x, а предельная абсолютная погрешность в $|k|$ раз больше предельной абсолютной погрешности приближенного сомножителя.

$$\Delta_u^* = |k| \cdot \delta_u^* \tag{10}$$

Зная предельную относительную погрешность δ_u^* произведения u, можно определить его абсолютную погрешность по формуле $\Delta_u^* = |u| \cdot \delta_u^*$.

Из формулы (8) видно, что предельная относительная погрешность произведения не может быть меньше, чем предельная относительная погрешность наименее точного из сомножителей. Поэтому при перемножении чисел разной относительной точности (т. е. имеющих разное число верных значащих цифр) выполняют следующие действия по вычислению произведения:

1) выделяют число с наименьшим количеством верных значащих цифр (наименее точное число);

2) округляют оставшиеся сомножители таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;

3) сохраняют в произведении столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет наименее точный из сомножителей (выделенное число).

Пример 1. Найти произведение приближенных чисел x_1= 3,6 и x_2= 84,489, все цифры которых верны

Р е ш е н и е . В первом числе две верные значащие цифры, а во втором — пять. Поэтому второе число округляем до трех значащих цифр. После округления имеем x_1 = 3,6; x_2=84,5. Отсюда

$$x_1 \, x_2 = 3{,}6 \bullet 84{,}5 = 294{,}20 \approx 2{,}9\ 10^2.$$

В результате оставлены две значащие цифры, т. е. столько, сколько их имел сомножитель с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Число верных знаков произведения. Пусть дано произведение k сомножителей ($k \leq$^ 10):

$u = x_1 x_2 \ldots x_n$

где $x_t \neq 0$, Каждый из сомножителей содержит не менее чем n верных цифр ($n > 1$).

Приведем ответ: *если все сомножители имеют* п *верных значащих цифр и число сомножителей не более 10, то число верных знаков произведения на одну или на две единицы меньше* п. *В том случае, если сомножители имеют различную точность, под* п *следует понимать число верных знаков наименее точного из сомножителей.*

Пример 3. Определить предельную относительную погрешность и количество верных цифр произведения *u* — 84,76 • 8,436, где все цифры сомножителей верны в узком смысле.

Р е ш е н и е . Оба сомножителя имеют по четыре верные цифры в узком смысле, т, е. $n = 4$ и $\omega = 0{,}5$. Тогда имеем

$$\delta_u^* = \frac{1}{8}\cdot 10^{-3} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$$

Следовательно, произведение имеет по меньшей мере гри верные цифры в узком смысле.

Проверим, так ли это. Найдем произведение данных приближенных чисел; оно равно $u = 714{,}1$. Определим предельную абсолютную погрешность по формуле $\Delta_u^* = |u| \cdot \delta_u^*$; получим $\Delta_u^* =$ 714,1 • 0,125 . $10^{-3} \approx 0{,}09$. Тогда $u =$ 714,1 ± ± 0,09. Отсюда следует, что произведение имеет три верные цифры в узком смысле.

Погрешность частного. Число верных знаков частного

Теорема. *Относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть *x* и *y* — приближенные числа, а Δ_x и Δ_y — абсолютные погрешности. Для определенности положим $x > 0$, $y > 0$. Требуется найти погрешность частного

$$u = \frac{x}{y} \tag{1}$$

Прологарифмировав выражение (1), получим

$$\ln u = \ln x - \ln y. \tag{2}$$

Абсолютная погрешность алгебраической суммы приближенных чисел не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, поэтому

$$\Delta_{\ln u} \le \Delta_{\ln x} + \Delta_{\ln y}. \tag{3}$$

Применяя приближенную формулу $\Delta_{\ln u} \approx \dfrac{\Delta_u}{u}$

Получим $\Delta_u / u \le \Delta_x / x + \Delta_y / y.$ или

$$\delta_u \le \delta_x + \delta_y. \tag{4}$$

Знак модуля в равенстве (4) опущен, так как мы положили $x > 0$, $y > 0$.

Формула (4), очевидно, будет верной и тогда, когда делимое и делитель имеют разные знаки.

С л е д с т в и е . *Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.*

Действительно, $\delta_x \le \delta^*_x$, $\delta_y \le \delta^*_y$, т.е. $\delta_u \le \delta^*_x + \delta^*_y$.

$$\delta^*_u = \delta^*_x + \delta^*_y. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е . Все правила приближенных вычислений, сформулированные для умножения, распространяются и на случай деления. В частности, если одно из чисел (делимое или делитель) относительно точнее другого, то более точное число округляется так, чтобы в нем оказалось на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр наименее точного из чисел. Это же правило распространяется на случай, когда приходится перемножать или делить несколько чисел. Окончательный результат, как правило, записывается с абсолютной или предельной абсолютной погрешностью. Поэтому, зная относительную или предельную относительную погрешность частного, легко определить абсолютную или предельную абсолютную погрешность результата по формуле

Пример 1, Вычислить частное $u=x/y$ приближенных чисел $x = 5{,}735$ и $y = 1{,}23$, если все цифры делимого и делителя верны в широком смысле. Определить предельные относительную и абсолютную погрешности.

Р е ш е н и е . Сначала вычислим частное. Делимое $x = 5{,}735$ содержит четыре верные значащие цифры, делитель — три; поэтому можно проводить деление без предварительного округления: $u = 5{,}735/1{,}23 = 4{,}66$. В результате оставлены три значащие цифры, так как наименее точное число (делитель) содержит три верные значащие цифры.

2) Подсчитаем предельную относительную погрешность частного по фор-

муле (5), учитывая, что $\Delta_x = 0{,}001$, $\Delta_y = 0{,}01$

$$\delta *_u = \delta *_x + \delta *_y = \frac{1}{5735} + \frac{1}{123} = = 0.00018 + 0{,}00813 = 0{,}00831 = 0{,}83\ \%.$$

3) Определим предельную абсолютную погрешность

$$A_u = |\, u \,|\, б^* = 4{,}66.0{,}0083 = 0{,}04.$$

Окончательный результат следует записать так: $u = 4{,}66 \pm 0{,}04$. Заметим, что цифра сотых долей является сомнительной, поскольку $0{,}04 > 0{,}01$. Если записать результат только с верными значащими цифрами, то необходимо произвести округление и учесть погрешность округления, т. е. $u_1 = 4{,}7$; $\Delta_u \le \Delta_{u_1} + \Delta_{окр}. = 0{,}04 + 0{,}04 = 0{,}08 \approx 0{,}1$. Тогда $u = 4{,}7 \pm 0{,}1$. Однако на самом деле предельная абсолютная погрешность несколько ниже

Число верных знаков частного. Пусть приближенные числа x и y имеют по n верных значащих цифр и пусть

$$x = \alpha_1 10^m + \ldots, \quad y = \beta_1 10^l = \ldots..$$

Тогда, , если $\alpha_1 \ge 2$ и $\beta_1 \ge 2$, то частное имеет $n-1$ верную значащую цифру. Если же $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = 1$, то частное может иметь n-2 верные значащие цифры.

Пример 2. Вычислить частное u = 39,356 : 2,21 и определить, сколько в нем содержится верных значащих цифр, если в делимом и делителе все цифры верные (в узком смысле).

Решение. Поскольку в делителе три верные значащие цифры, а в делимом — пять, делимое округляем до четырех значащих цифр и производим деление: u = 39,36 : 2,21 = 17,81 $\approx$ 17,8 (в результате оставляем столько значащих цифр, сколько их имеется в числе с меньшим количеством верных значащих цифр).

3.4.Ошибки вычисления функций

Погрешность функции. **Теорема**. *Предельная абсолютная погрешность функции f(x) приближения x точного числа X в* $f'(X)$ *раз больше предельной абсолютной погрешности самого числа.*

Доказательство

$$f(X) - f(x) \approx f'(X)(X - x) = f'(X) \cdot \Delta_x,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Предельная относительная погрешность функции* $f(x) = C \cdot x^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$*, и предельная относительная погрешность x связаны соотношением* $\delta^*_{x^p} = p \cdot \delta^*_x$.

Доказательство.

$$\delta_{f(x)} = \frac{\Delta_{f(x)}}{|f(x)|} = \frac{f'(x)\Delta_x}{|f(x)|} = \frac{p \cdot x^{p-1}\Delta_x}{x^p} = \frac{p \cdot \Delta_x}{x} = p \cdot \delta_x$$

Отсюда следует, что $\delta_{x^p} \le p \cdot \delta^*_x$ *и, следовательно,* $\delta^*_{x^p} = p \cdot \delta^*_x$.

В качестве простого следствия приведем еще одно утверждение.

Теорема. *Предельная относительная погрешность корня m-й степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.*

Доказательство. Пусть

$u = f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, тогда

$$\delta_{f(x)} = \frac{\Delta_{f(x)}}{|f(x)|} = \frac{f'(x)\Delta_x}{|f(x)|} = \frac{\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\Delta_x}{x^{\frac{1}{m}}} = \frac{\frac{1}{m}\Delta_x}{x} = \frac{1}{m}\delta_x \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Из равенства (2) вытекает, что при извлечении корня m-й степени из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет подкоренное число.

3.5. Практические правила реальных расчётов. Правила подсчета цифр

При вычислениях, если не проводится строгий подсчет погрешностей, рекомендуется пользоваться правилами подсчета цифр. Эти правила указывают, как следует проводить округление всех результатов, чтобы, во-первых, обеспечить заданною точность окончательного результата и, во-вторых, не производить вычислений с лишними знаками, не оказывающими влияние на верные знаки результата,

Приведем п р а в и л а п о д с ч е т а ц и ф р , данные В. М. Брадисом.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.

5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1—4, В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается,

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при других действиях), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну «запасную цифру»$_с$

7. При вычислении с помощью логарифмов одночленного выражения рекомендуется подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и воспользоваться таблицей логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

8. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые согласно предыдущим правилам обеспечивают $m + 1$ цифру в результате.

Эти правила даются в предположении, что компоненты действий содержат только верные цифры и число действий невелико.

4. ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

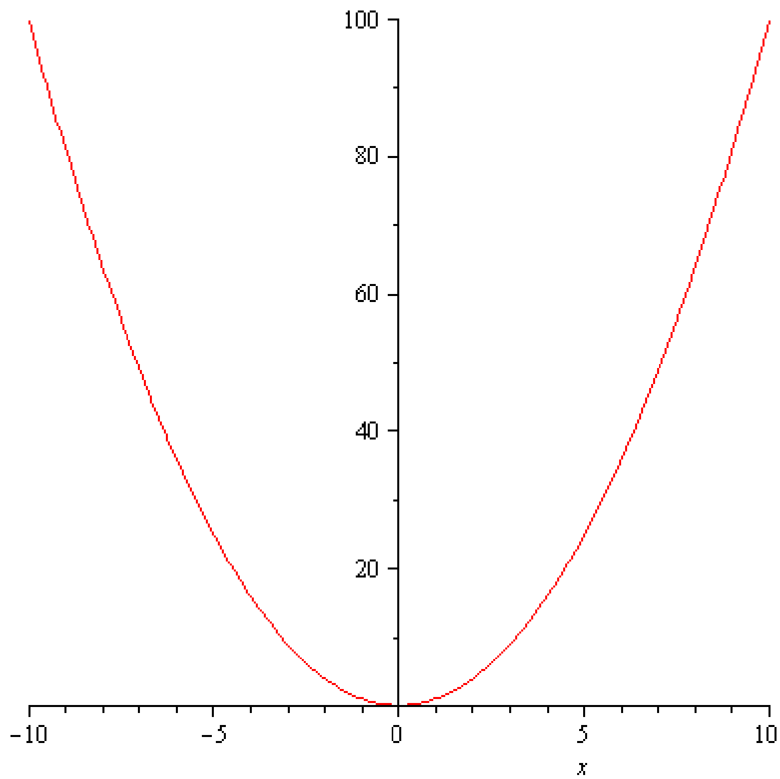
4.1.Исследование функций на компьютере и построение их графиков.

Построение графиков функций

Для построения графиков функций в программе Maple используется команда plot. Например, чтобы построить график функции $y = x^2$ вводим команду

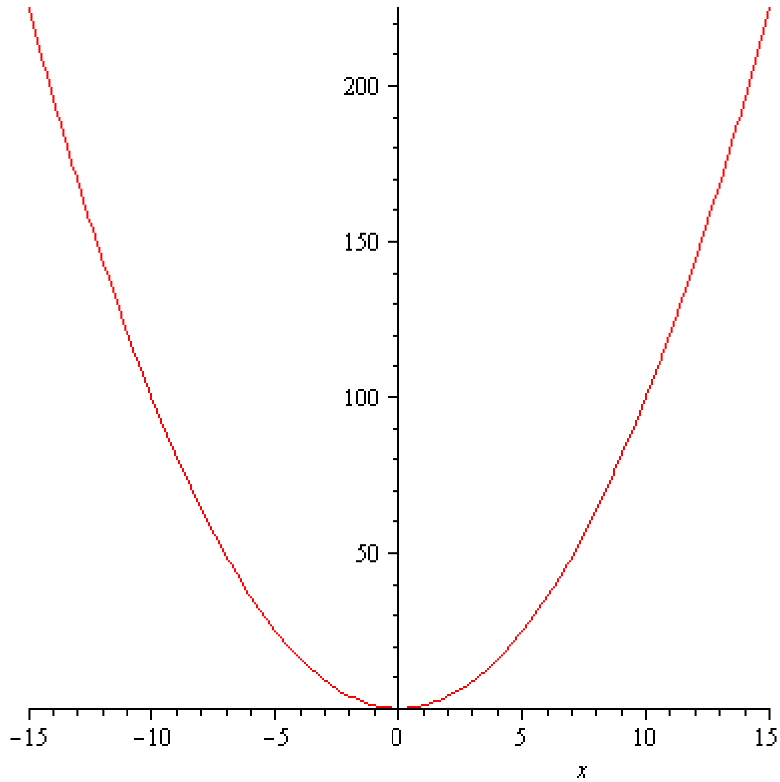
$> plot(x\wedge 2);$

Знак "^" используется для обозначения показателя степени.



Если нам требуется указать конкретную область изменения переменной по оси абсцисс, то вводим это следующей командой.

$> plot(x\wedge 2, x = -15..15);$



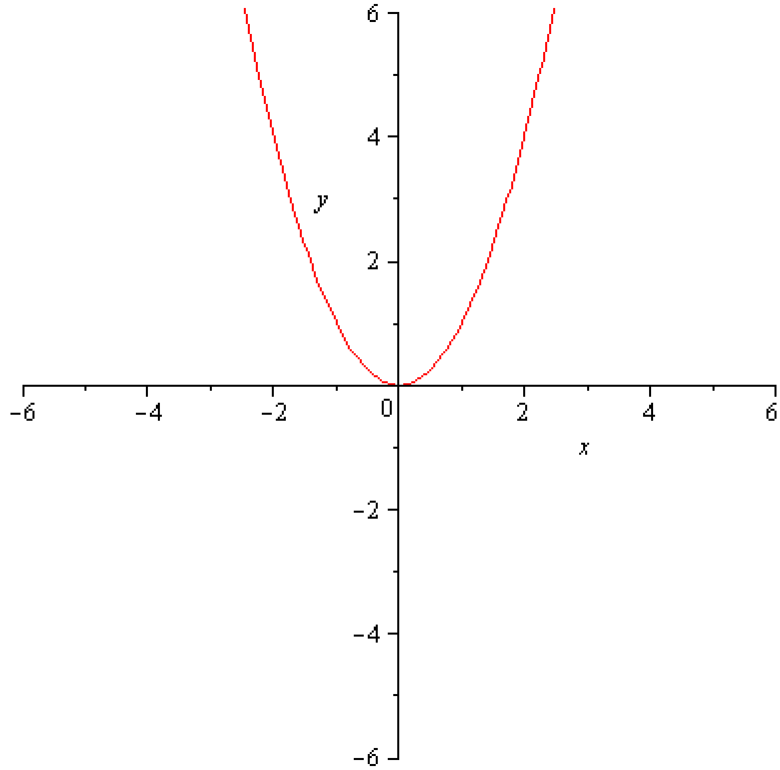
Для того чтобы изобразить график функции для всех заданных нами значений переменной x, программе пришлось сделать неодинаковый масштаб по разным осям. Если нам требуется одинаковый масштаб по обеим координатным осям, то этого можно добиться так

$$> plot(x\^2, x=-6..6, -6..6);$$

или так

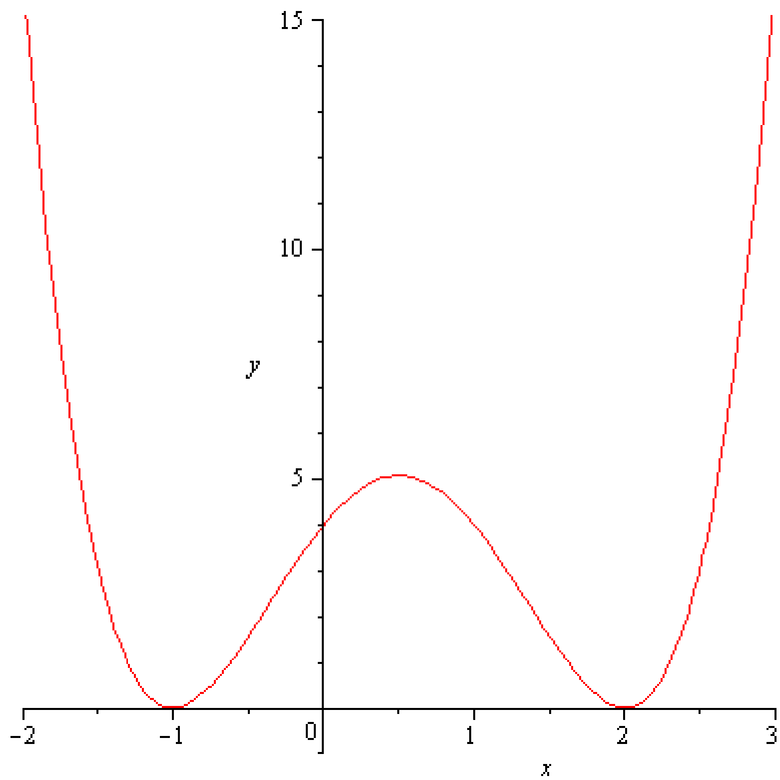
$$> plot(x\^2, x=-6..6, y=-6..6);$$

В последней команде явно указано название второй переменной, поэтому вертикальная ось будет иметь подпись y.



Все остальные графики явной функции строятся подобным же образом. Проиллюстрируем это серией характерных примеров.

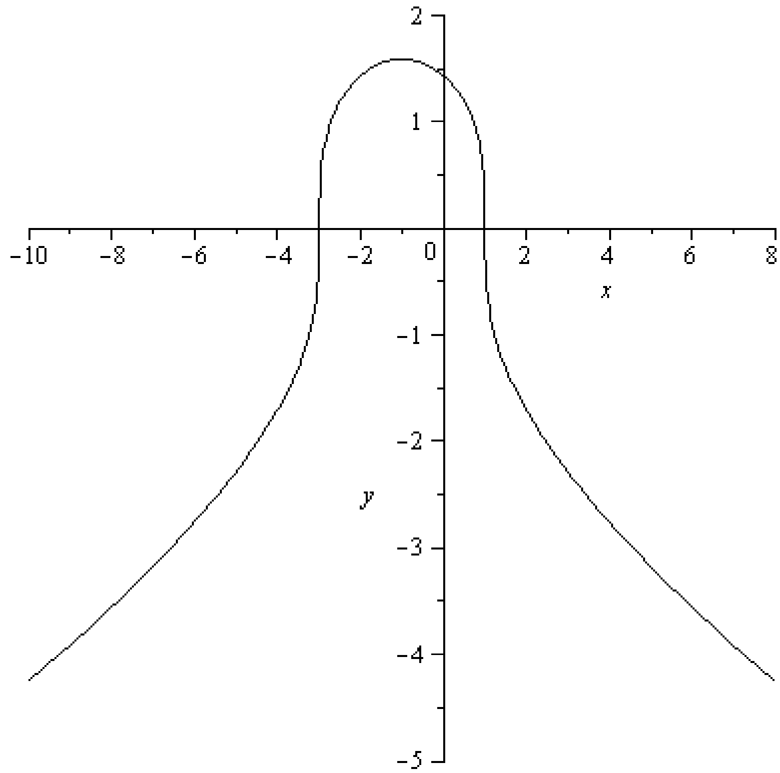
$> plot((x+1)\wedge 2*(x-2)\wedge 2, x=-2..3, y=-1..15);$



В случае, когда происходит извлечение корней из отрицательных чисел надо указать программе, что мы строим графики в действительных переменных, а не в комплексных.

$$> with(RealDomain);$$

$$> plot((3-2*x-x\wedge 2)\wedge(1/3), x=-10..8, y=-5..2);$$



Последний график хорошо иллюстрирует наличие вертикальных касательных в точках -3 и 1, то есть равенство бесконечности производных в этих точках.

Опции при построении графиков функции

В графики можно включать дополнительные опции:

- опция title добавляет заголовок;
- опция numpoints позволяет изменять количество точек графика. Значение этой опции по умолчанию - 49;
- опцией axes задается тип осей: рамка (FRAME), прямоугольник (BOXED), ортогональные (NORMAL) или без осей (NONE);
- опции xtickmarks и ytickmarks управляют числами меток на осях;
- опцией color можно задать цвет точек графика;
- опция style применяется для задания графика кривой: line - график строится в виде линии, point - график строится в виде точек;
- опцией thickness можно менять толщину графика;
- опция coords служит для задания различных систем координат.

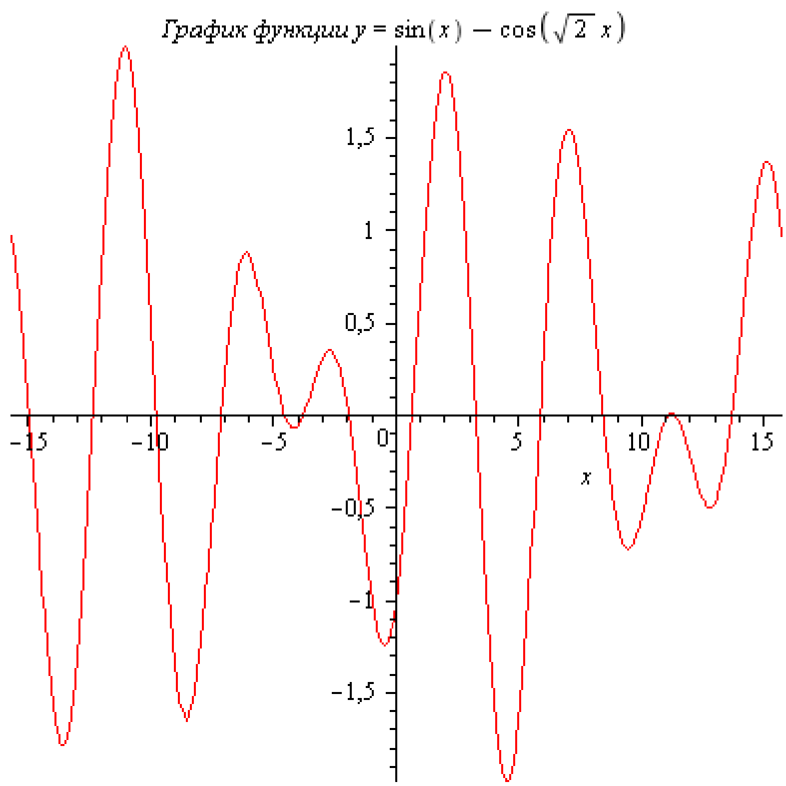
На дальнейших примерах будет проиллюстрировано действие приведенных выше опций.

Опцией title можем добавить заголовок к графику.

$> plot(\sin(x)-\cos(sqrt(2)*x), x=-5*Pi..5*Pi,$

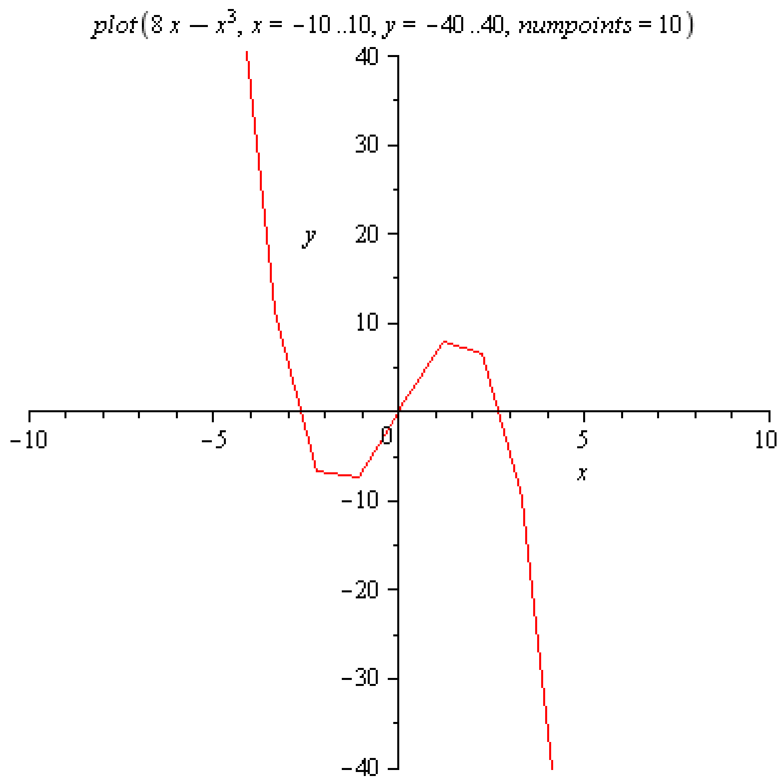
$title=$'График функции y=sin(x)-cos($\sqrt{2}$ x)');

Отметим, что выражение *Pi* задает число π в программе Maple.

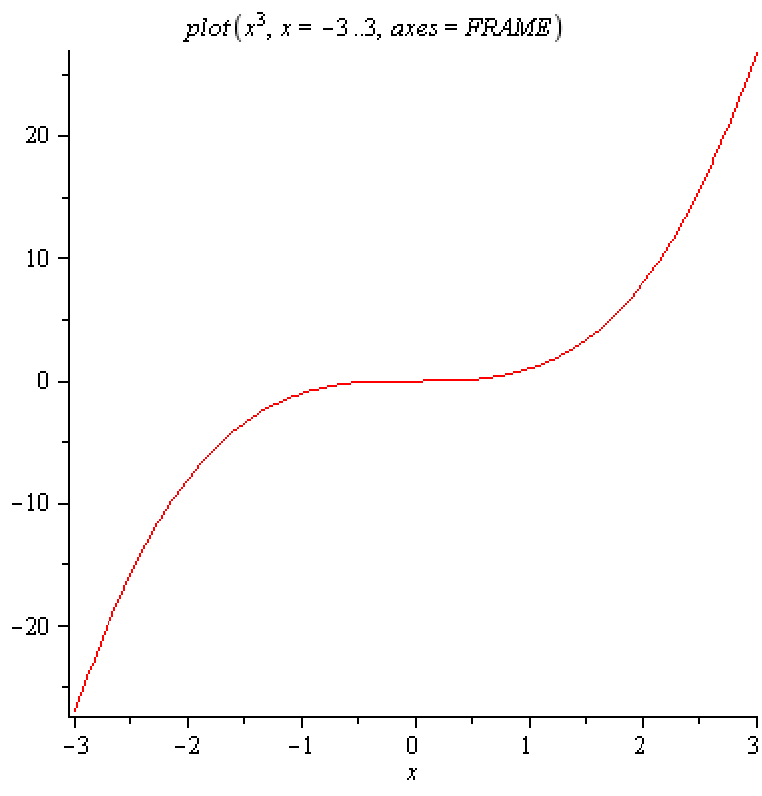


Опция numpoints регулирует частоту точек, через которые проходит график. Если задать мало число точек графика, то будет заметна его изломанность как на следующем примере.

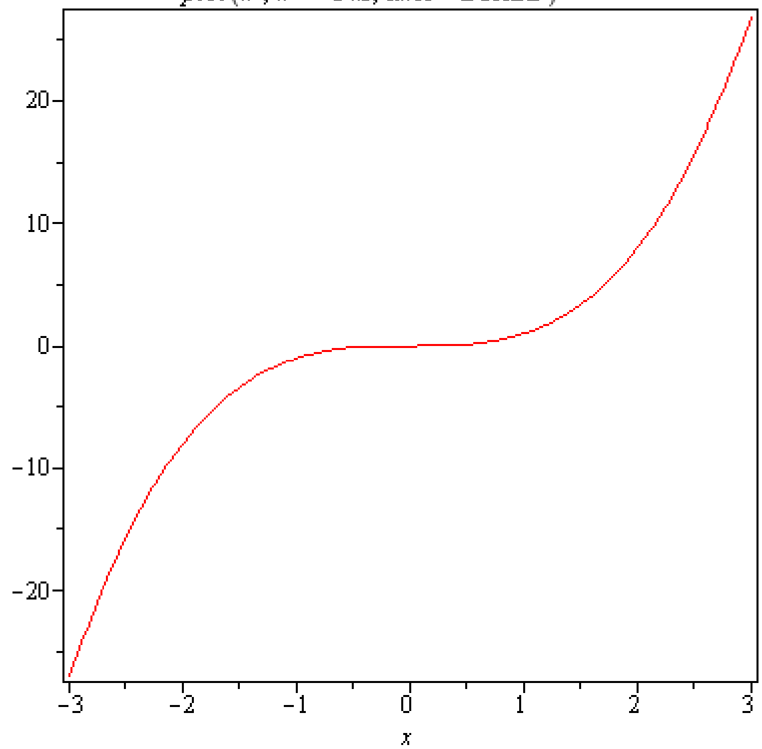
$> plot(8*x-x\,\hat{}\,3, x=-10..10, y=-40..40, numpoints=10);$



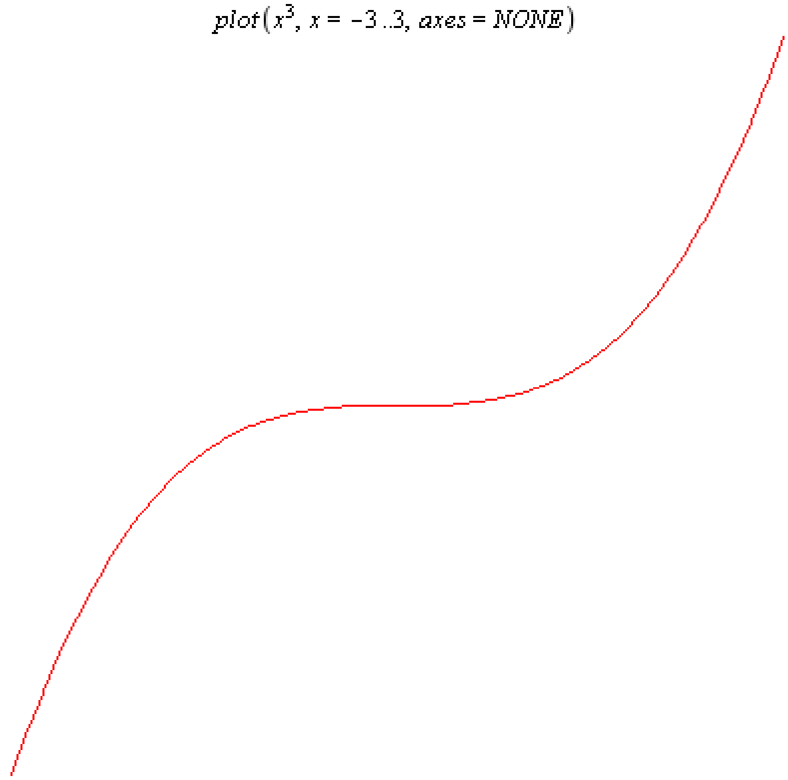
Следующие примеры иллюстрируют действие опции axes, сами команды указаны в заголовках к графикам.

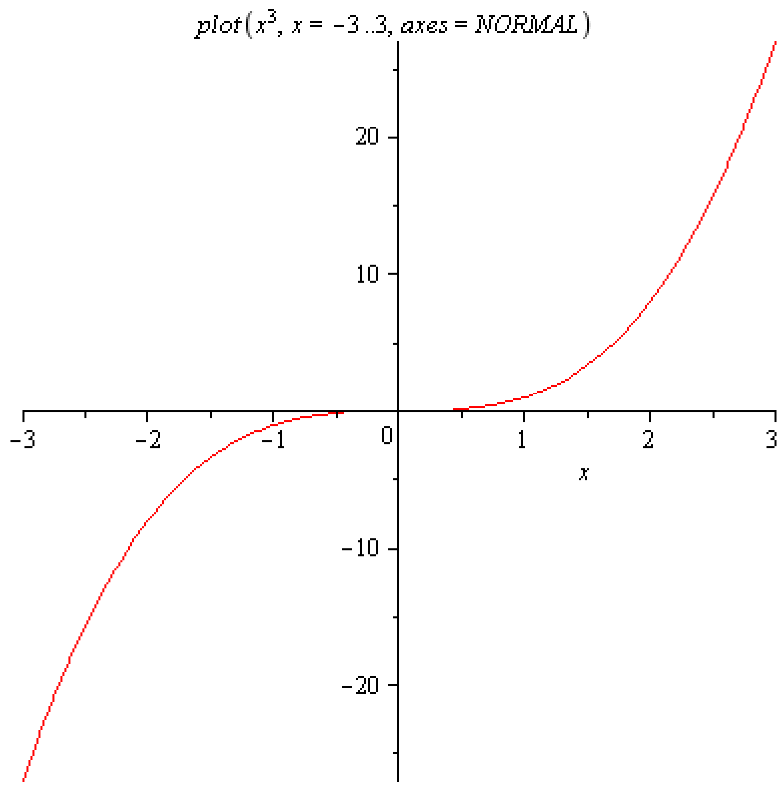


$plot(x^3, x = -3..3, axes = BOXED)$



$plot(x^3, x = -3..3, axes = NONE)$

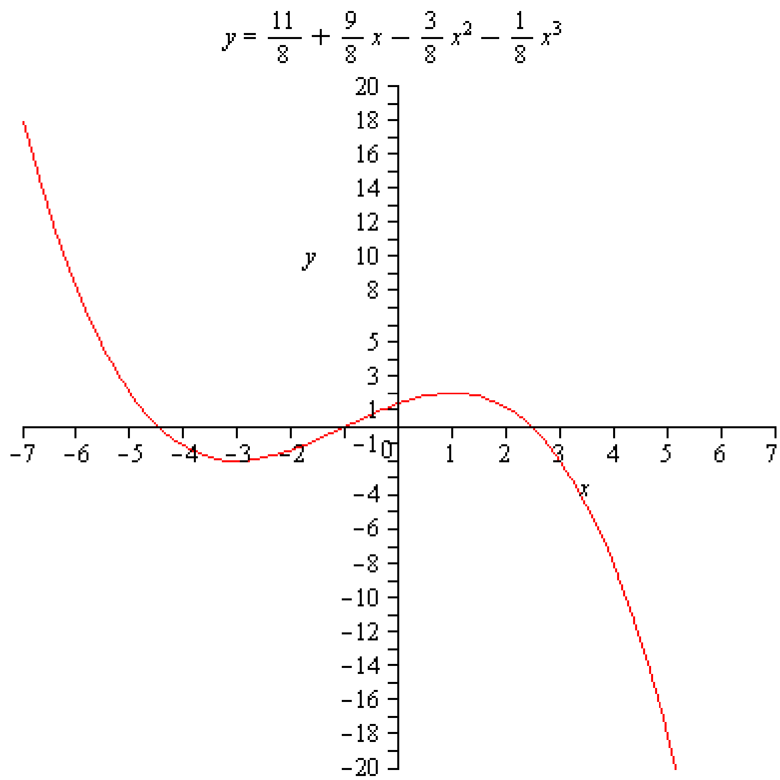




Следующие примеры показывают, как можно управлять частотой меток на осях координат с помощью команд xtickmarks и ytickmarks.

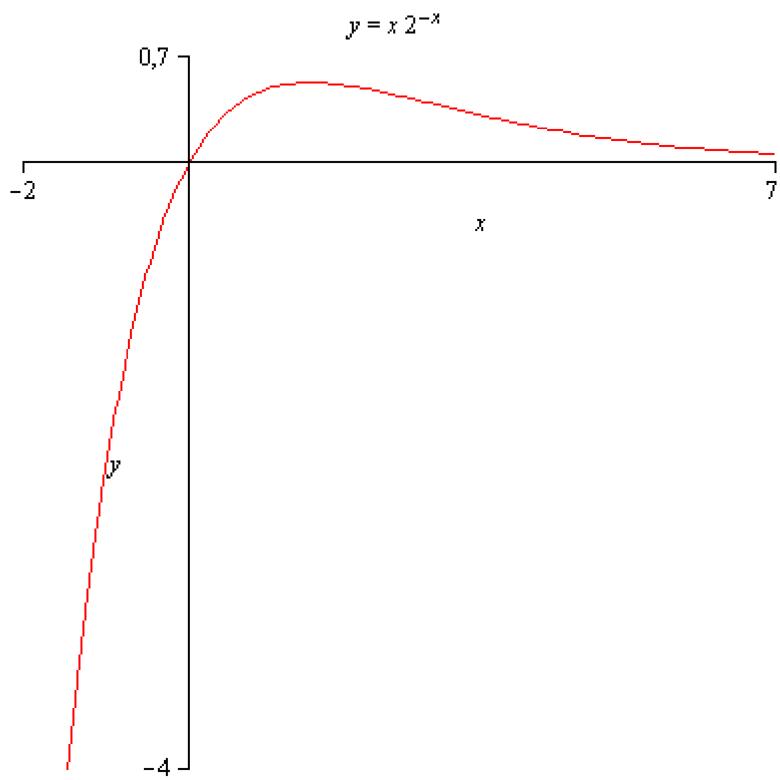
Сначала сделаем очень частую сетку координат.

$$> plot(1/8*(11+9*x-3*x\wedge 2-x\wedge 3), x=-7..7, y=-20..20,$$
$$xtickmarks=15, ytickmarks=40,$$
$$title='y=1/8*(11+9*x-3*x\wedge 2-x\wedge 3)');$$



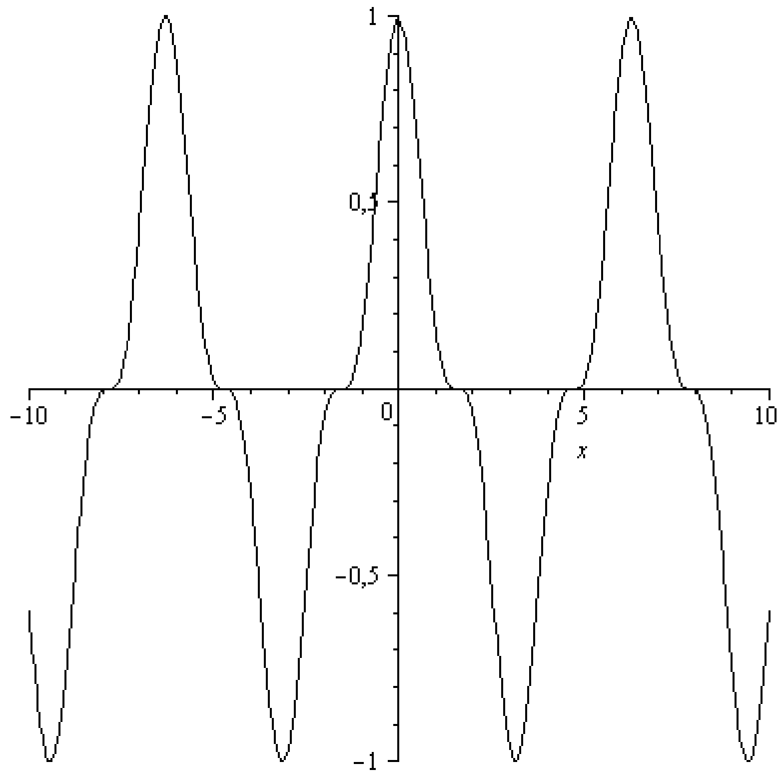
На следующем примере обозначим лишь крайние точки на осях.

$> plot(x*2\wedge(-x), x=-2..7, y=-4..0.7,$
$xtickmarks=2, ytickmarks=2, title='y=x*2\wedge(-x)');$



Опция color задает цвет графика. Можно использовать все стандартные цвета: black, red, blue, skyblue, green, yellow, gray, magenta, cyan и другие.

$$> plot(\cos^\wedge 3(x), color = black);$$

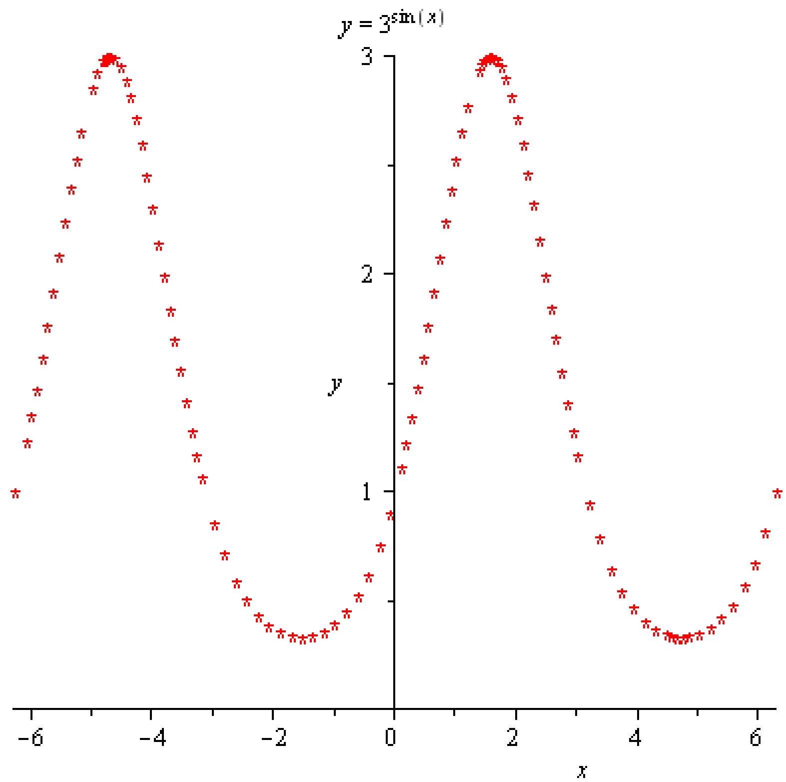


Опцией style задается вид кривой - линией или точками. Причем форму точек можно менять с помощью опции symbol: asterisk, box, cross, circle, diagonalcross, diamond, point, solidcircle, solidbox, soliddiamond, solidsphere, sphere, default.

$$> plot(3^\wedge \sin(x), x = -2*Pi..2*Pi, y = 0..3,$$

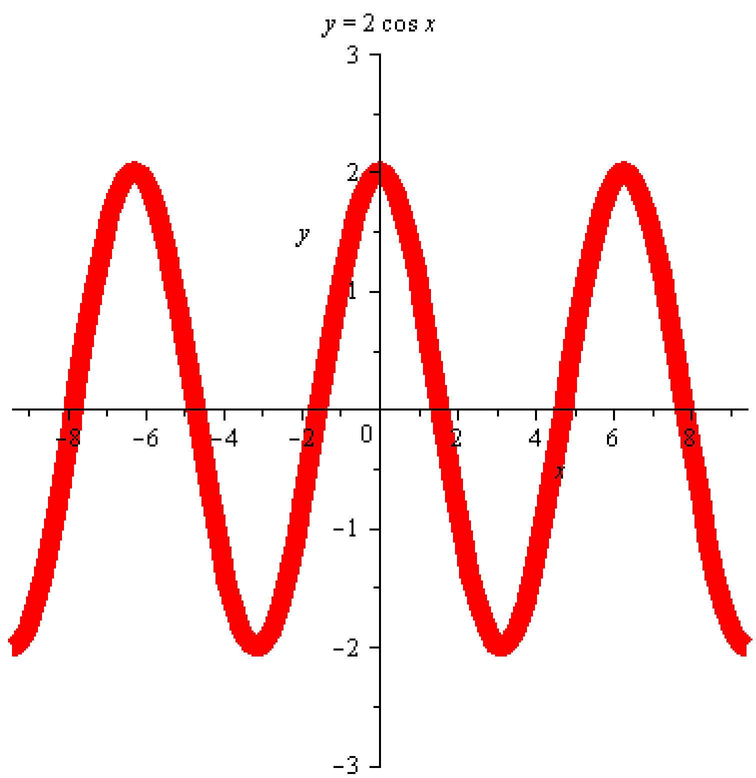
$$style = point, symbol = asterisk, numpoints = 70);$$

Здесь уместно вспомнить и повторить действие опции numpoints.



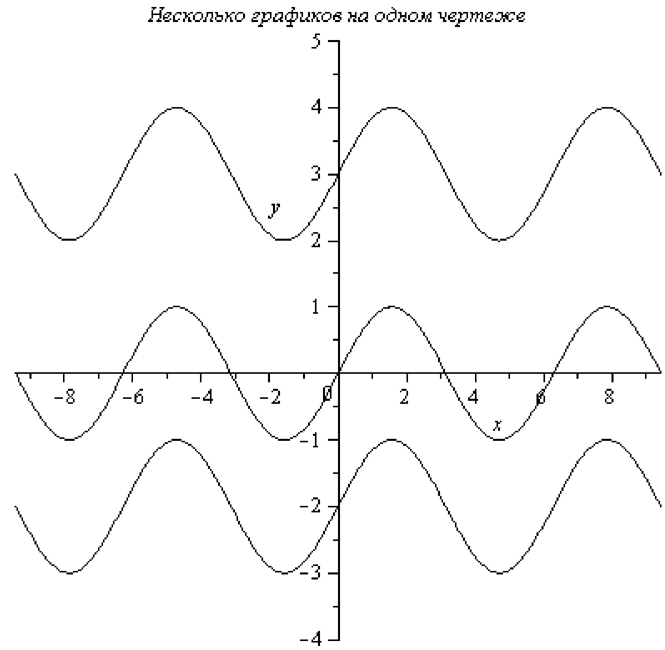
Действие опции thickness хорошо иллюстрируется следующим примером

$> plot(2*\cos(x), x=-3*Pi..3*Pi, y=-3..3, thickness=10);$



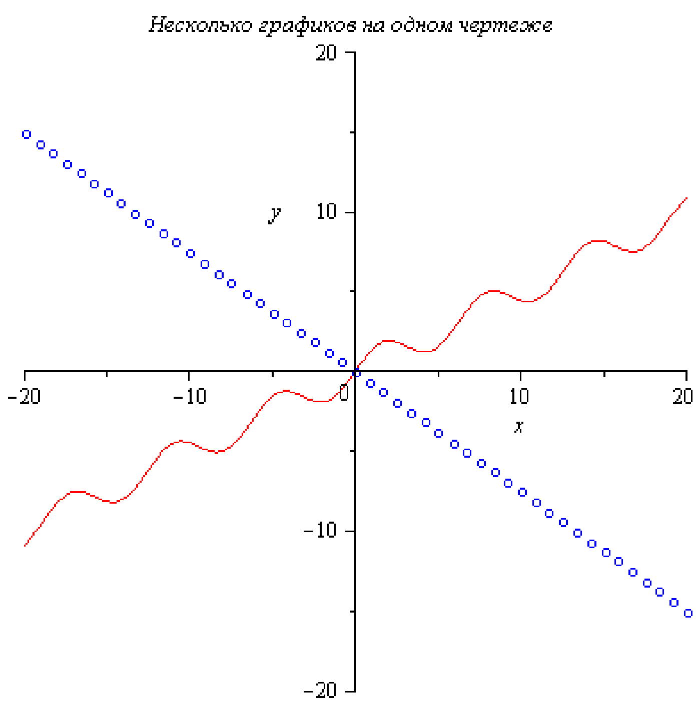
В Maple имеется возможность построения нескольких функций на одном чертеже. Для этого, все нужные графики перечисляются через запятую в квадратных скобках.

$$> plot([\sin(x),\sin(x)+3,\sin(x)-2],x=-3*Pi..3*Pi,y=-4..5);$$



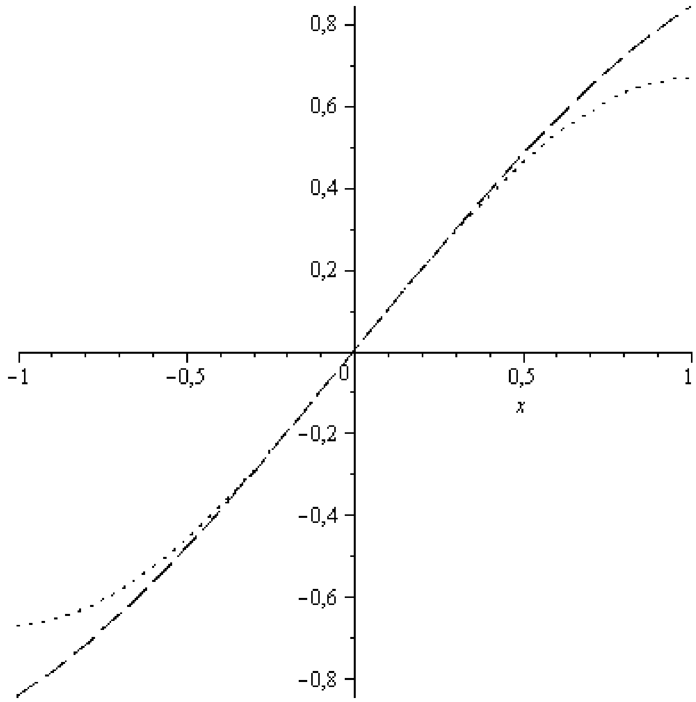
Причем, для каждого графика можно задать свои опции, такие как style, color, thickness, numpoints и другие.

$$> plot([x/2+\sin(x),3*x/4],x=-20..20,y=-20..20,$$
$$color=[red,blue],style=[line,point],symbol=syrcle);$$



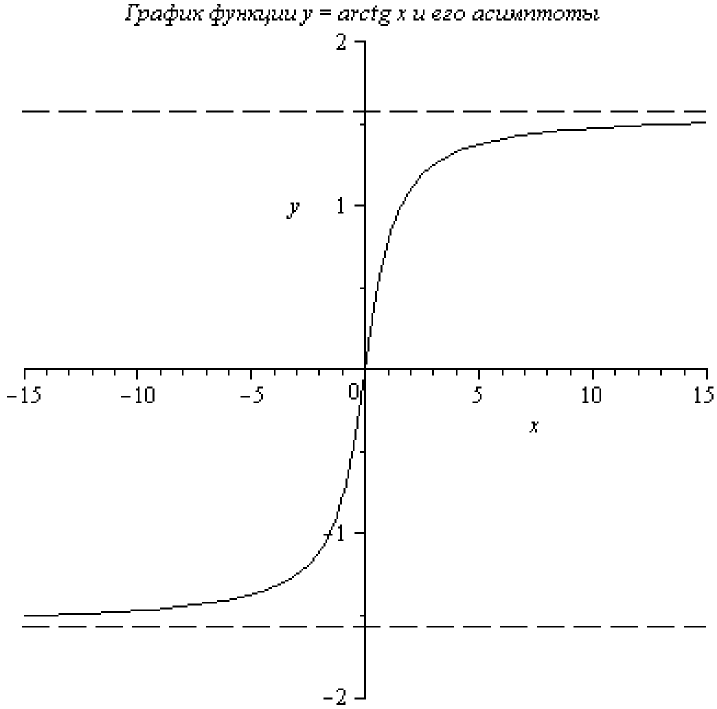
Ещё есть очень полезная опция linestyle с возможными параметрами dash, dashdot, dot, longdash, solid, spacedash, spacedot. Следующий пример демонстрирует близость, эквивалентность около нуля функций $\sin x$ и $x - \dfrac{x^3}{3}$.

$> plot([\sin(x), x - x\hat{\ }3/3], x = -1..1, linestyle = [dash, dot]);$



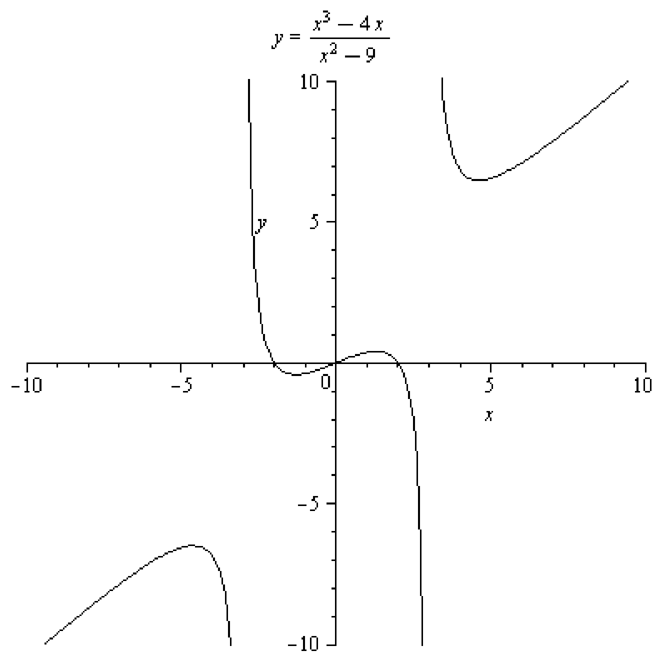
Эти возможности можно отлично использовать для изображения асимптот графиков.

$> plot([\arctan(x), -Pi/2, Pi/2], x = -15..15, y = -2..2,$
$color = black, linestyle = [solid, dash, dash]);$



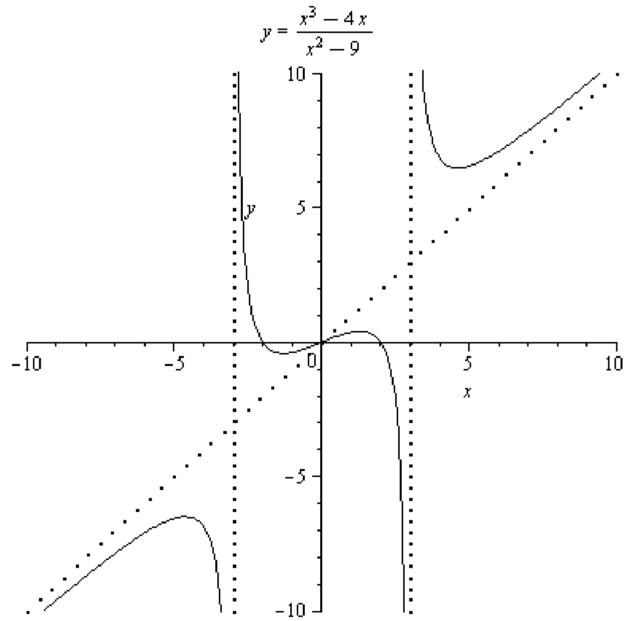
Приведем еще несколько примеров на построение графиков и асимптот.

$> plot((x\wedge 3-4*x)/(x\wedge 2-9), x=-10..10, y=-10..10,$
$discont=true, title='y=\frac{x^3-4x}{x^2-9}');$

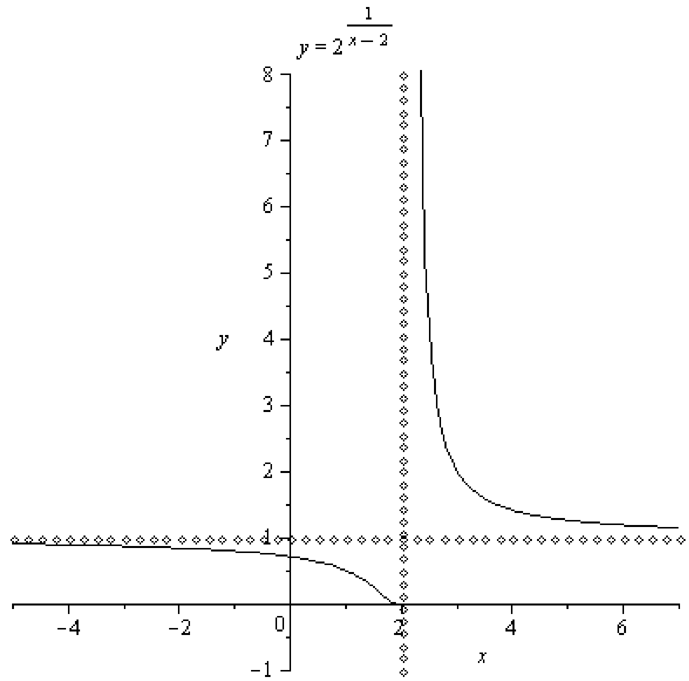


Если нам требуется график со всеми асимптотами, то можно его сделать по следующим образцам.

$> plot([(x\wedge 3-4*x)/(x\wedge 2-9),x,[-3,t,t=-10..10],$
$[3,t,t=-10..10]],x=-10..10,y=-10..10,discont=true,$
$style=[line,point,point,point],symbol=point,$
$color=black,title='y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-9}');$



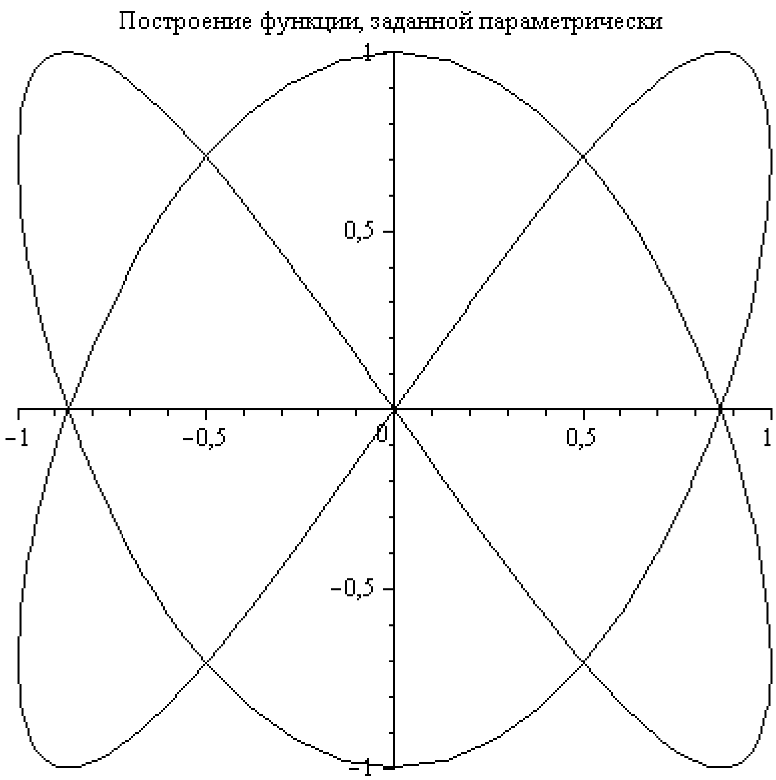
$> plot([2\wedge(1/(x-2)),1,[2,t,t=-1..8],x=-5..7,y=-1..8,$
$discont=true,style=[line,point,point],symbol=circle,$
$color=black,title='y=2^{\frac{1}{x-2}}');$



4.2. Декартовы, полярные и сферические координаты. Графики в полярных координатах. Параметризованные графики и их анимация

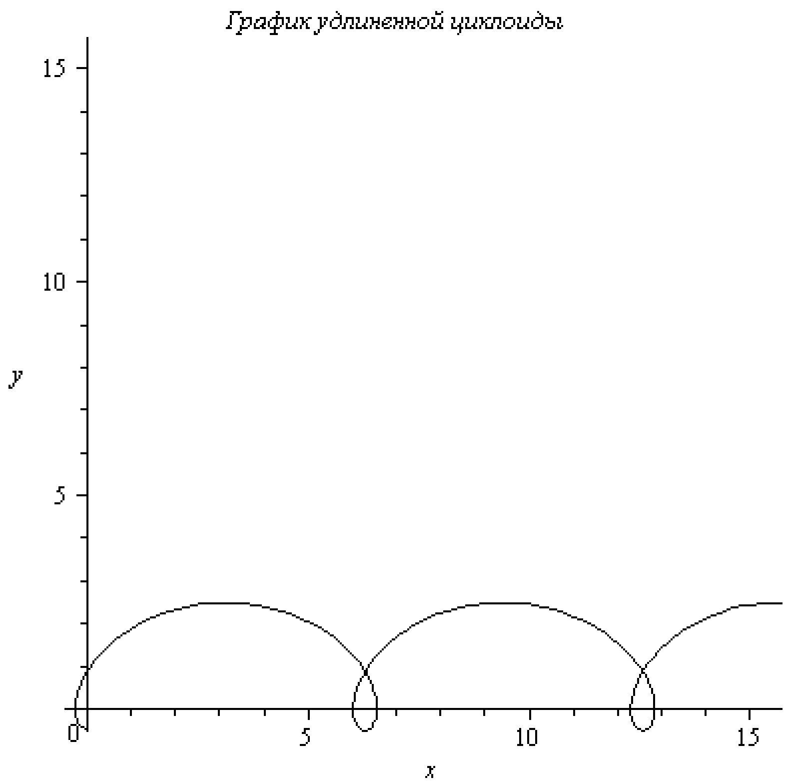
В примерах ниже мы используем ещё одну возможность программы Maple - построение графиков функций, заданных в параметрическом виде.

$> plot([\sin(2*t), \cos(3*t), t=0..2*Pi], color=black);$



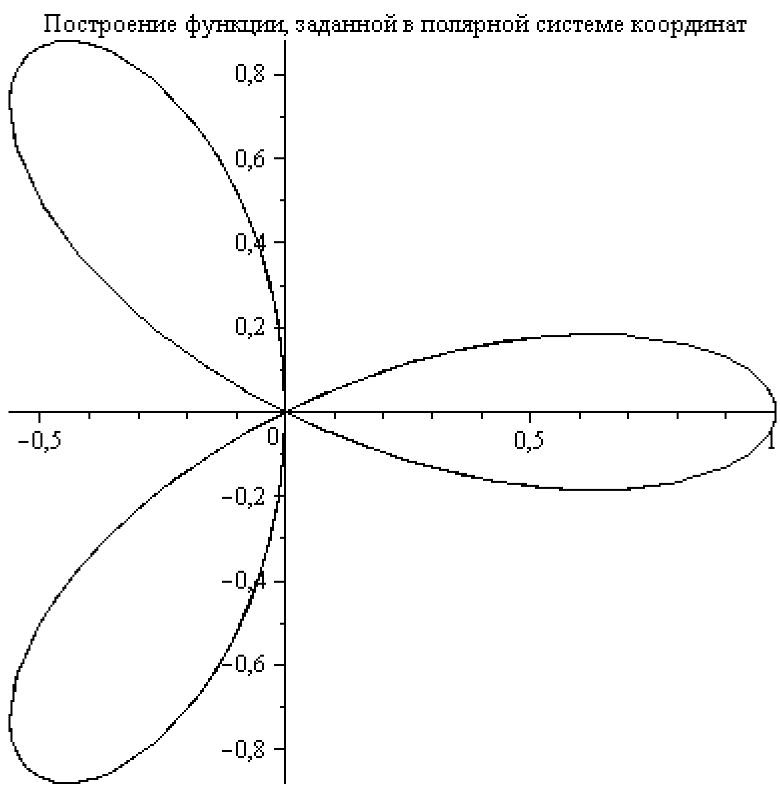
С помощью параметрической системы координат можно, например, наглядно увидеть траекторию движения точки трамвайного колеса на графике удлиненной циклоиды.

$> plot([t-1.5*\sin(t), 1-1.5*\cos(t), t=0..5*Pi],$
$x=-0.5..5*Pi, y=-0.5..5*Pi, color=black,$
$title=$'График удлиненной циклоиды');



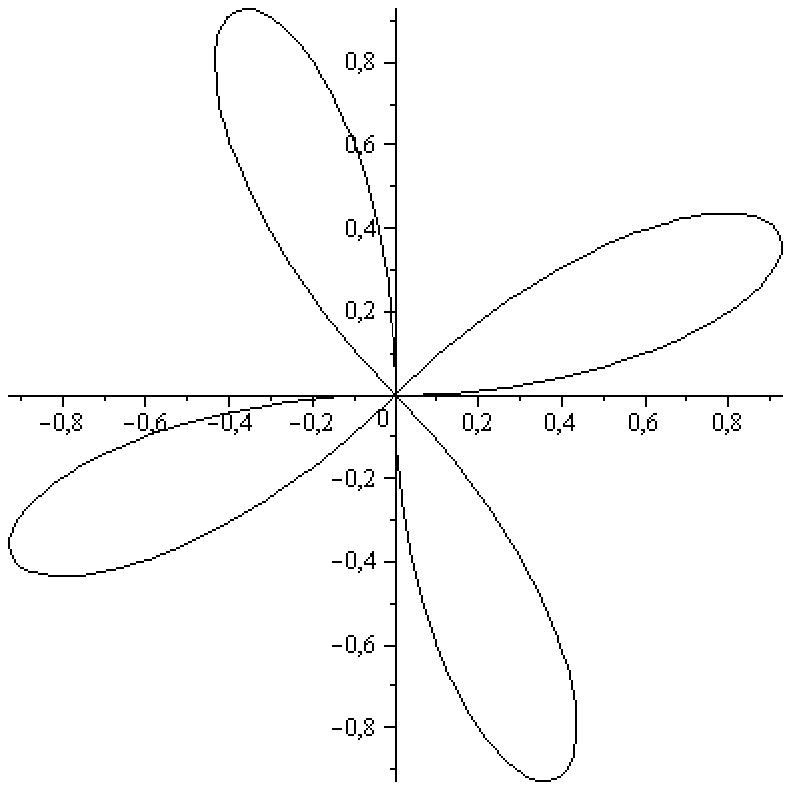
Имеется, также, возможность построения функций, заданных в полярной системе координат. Проиллюстрируем это на примере трехлепестковой розы.

$> plot([\cos(3*x), x, x=0..2*Pi], coords=polar, color=black);$



При построении графиков функций в полярной системе координат часто бывает полезна команда piecewise. С ее помощью можно указать, например, что полярный радиус неотрицателен.

$$> plot(piecewise(0 <= \sin(4*x), \sin(4*x)), x = 0..2*Pi,$$
$$coords = polar, color = black);$$



Применение анимаций при исследовании графиков

Большую помощь школьникам в более глубоком понимании функций окажет замечательная возможность программы Maple строить анимации графиков.

Например, посмотрим, какой является форма параболы в зависимости от коэффициента при старшей степени. Для этого используем команду animate.

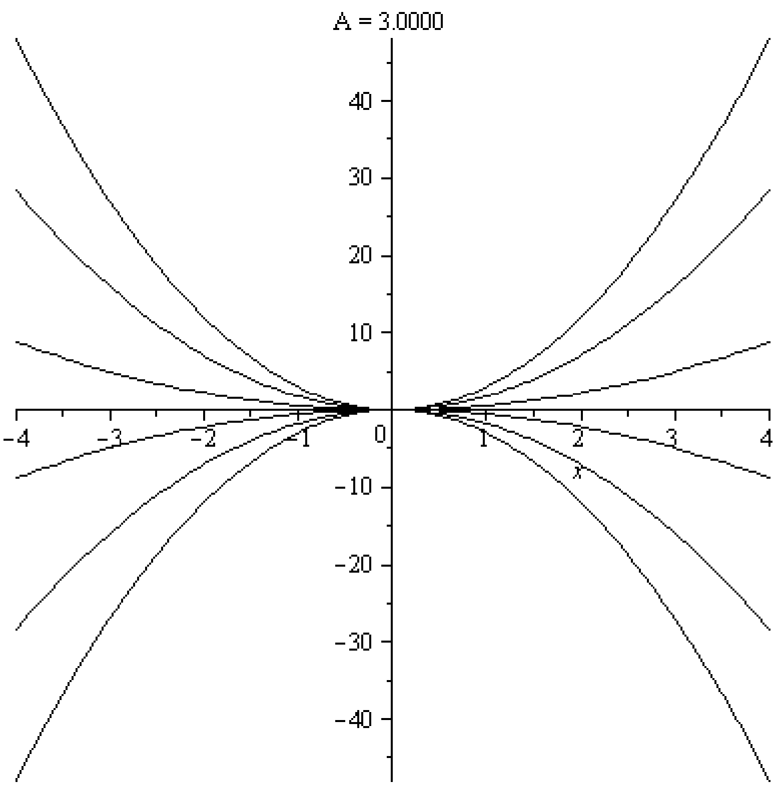
$$> with(plots):$$
$$> animate(plot, [A*x^{\wedge}2, x = -4..4, color = black], A = -3..3);$$

Первая команда нужна для подключения пакета графики, в который входят много интересных и полезных команд, одна из которых animate. В опциях этой команды мы задаем график интересующей нас функции с параметром, а в конце указываем область изменения параметра. Так как здесь мы не можем привести анимированную картинку, действие этой команды не печатаем.

Другой возможностью, связанной с анимацией, является возможность начертить несколько графиков функций при разных значениях параметра на одном чертеже.

$> animate(plot,[A*x^\wedge 2, x=-4..4, color=black],$
$A=-3..3, trace=5, frame=50);$

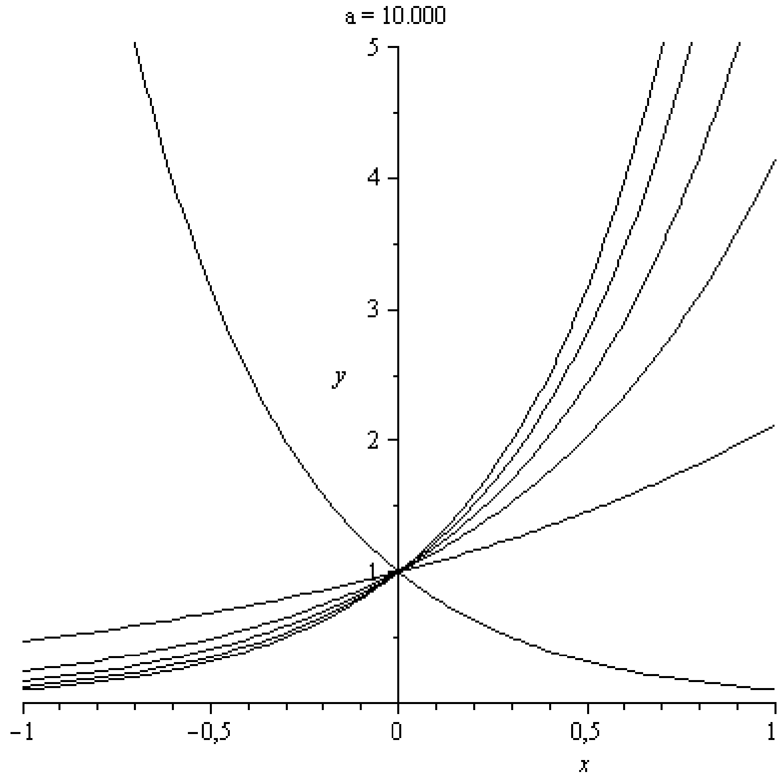
Опция trace показывает сколько графиков (помимо начального) отображать при промежуточных значения параметра, опция frame характеризует частоту выводимости графиков во время анимации.



Очень полезно для школьников посмотреть, например, графики показательной функции в зависимости от основания, как меняется график функции при непрерывном изменении основания.

$> animate(plot,[a^\wedge x, x=-1..1, y=0..5, color=black], a=0.1..10);$

$> animate(plot,[a^\wedge x, x=-1..1, y=0..5, color=black],$
$a=0.1..10, trace=5, frame=50);$



4.3. Критические точки и схема построения графика

Нахождение экстремумов и точек перегиба графиков функций можно осуществлять с помощью команды diff для взятия производных, с помощью команды solve для решения уравнений и с помощью команды solve для вычисления значений функций в интересующих нас точках.

Проиллюстрируем этот метод и действия команд на следующем примере. Исследуем функцию $y = x^3 - 7x^2 + 8x + 5$.

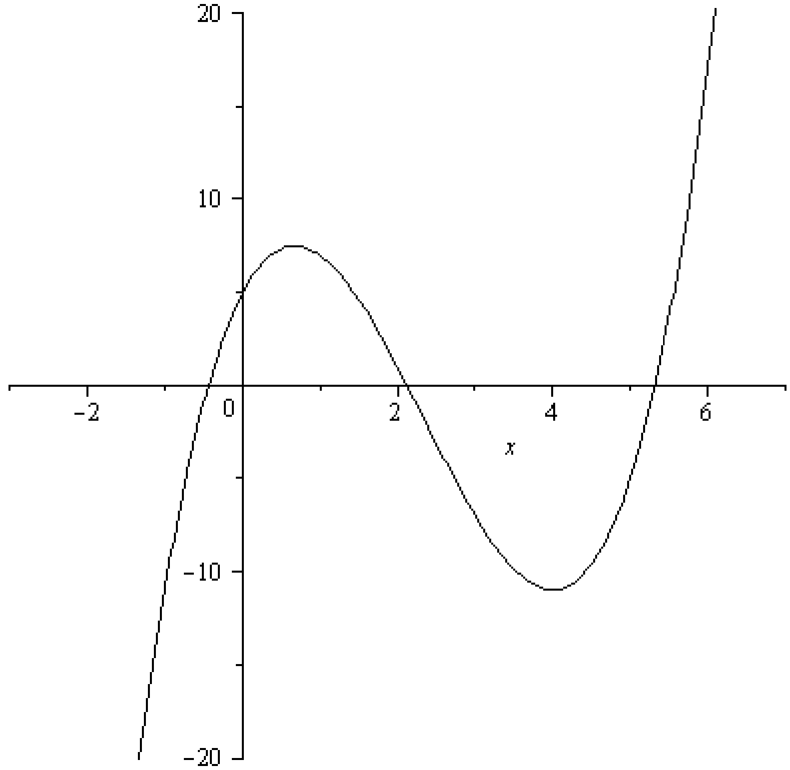
Введем функцию y, это делается с помощью оператора присваивания ":="

$> y := x\hat{}3 - 7*x\hat{}2 + 8*x + 5;$

$$y := x^3 - 7x^2 + 8x + 5$$

Строим график исследуемой функции с помощью команды plot

$> plot(y, x = -3..7, y = -20..20);$



Теперь найдем производную данной функции по переменной x с помощью команды diff.

$> yprime := diff(y,x);$

$$yprime := 3x^2 - 14x + 8$$

Далее находим точки экстремума исходной функции, для этого ищем нули производной, решая уравнение с помощью команды solve.

$> solve(yprime = 0);$

$$4, \frac{2}{3}$$

Подставляем найденные значения в начальную функцию и находим ординаты точек экстремума с помощью команды subs.

$> subs(x = 4, y);$

$$-11$$

$> subs(x = 4/3, y);$

$$\frac{151}{27}$$

Для нахождения точки перегиба вычисляем вторую производную исходной функции, то есть производную от производной.

$> yprimeprime := diff(yprime, x);$

$$yprimeprime := 6x - 14$$

Найдя нуль второй производной, получим точку перегиба.

$> solve(yprimeprime = 0);$

$$\frac{7}{3}$$

Остается подставить найденное значение в исходную функцию и получить ординату точки перегиба.

$> subs(x = 7/3, y);$

$$-\frac{47}{27}$$

Представленными здесь методами может быть решена любая школьная задача на построение графика функции, нахождение производной, точек экстремумов и точек перегиба.

4.4.Демонстрация возможностей программы Maple

При запуске программы загружается рабочий лист, на котором будет приглашение для ввода команды, обозначаемое символом ">". В командную строку можно записать любое алгебраическое выражение, состоящее из имен переменных и функций, чисел и символьных констант, соединенных алгебраическими операторами.

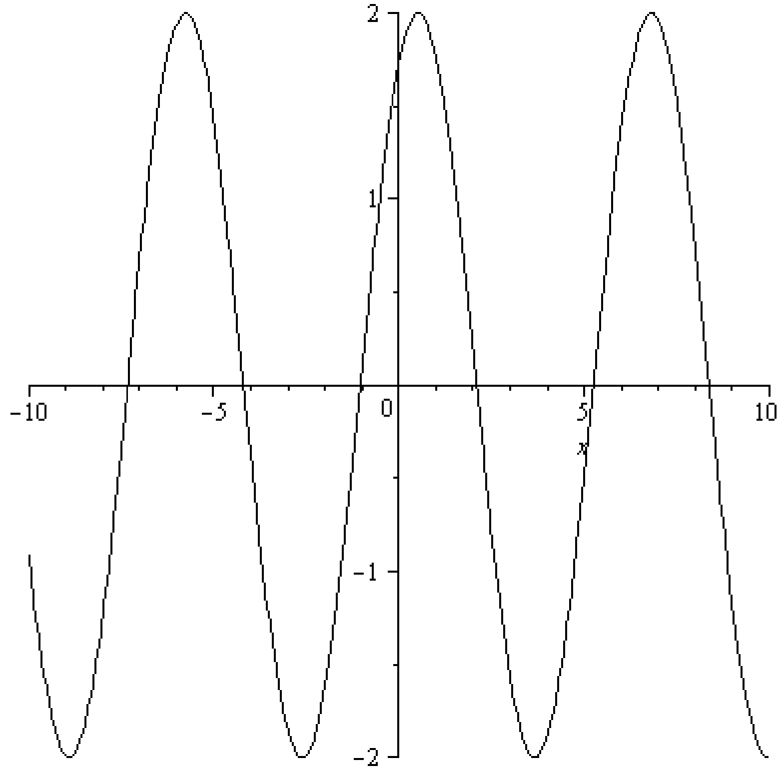
В конце команды должен стоять символ конца команды - точка с запятой или двоеточие. Если в конце выражения поставить знак ";", то при нажатии клавиши Enter или кнопки с восклицательным знаком на инструментальной панели выражение будет обработано программой, а результат выведен на дисплей. Если после конца команды стоит знак ":", то результат не будет выведен на дисплей, а только сохранится в памяти компьютера.

Можно получить справку по любой команде, записав ее название (или предположительное название) после знака вопроса и нажав клавишу Enter. Например, следующим образом можно получить справку для команды plot.

$> ?\,plot$

Для построения графика функции, заданной в явном виде используется команда plot. Например, чтобы построить график функции $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ вводим команду

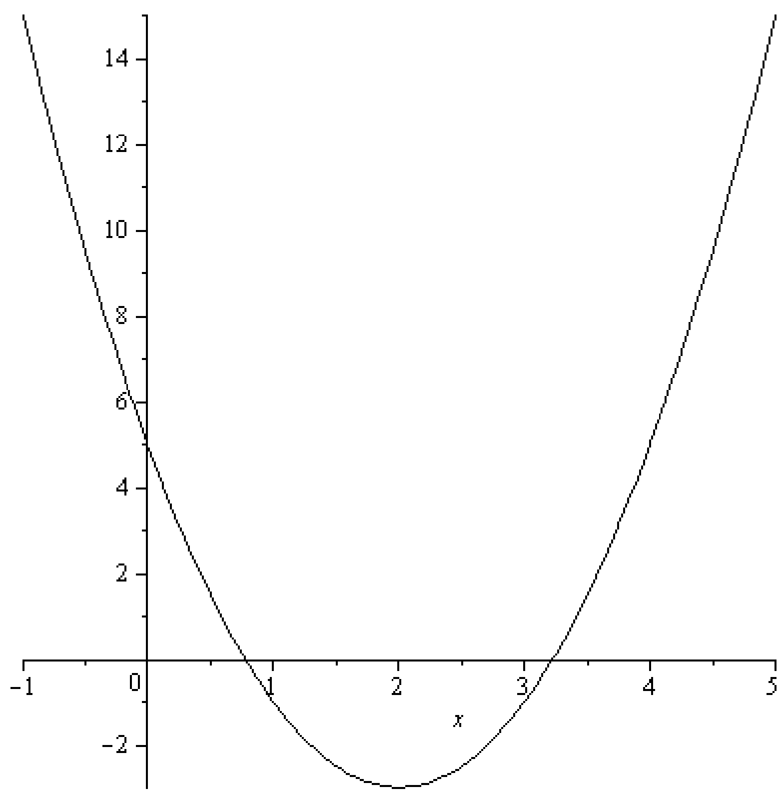
$> plot(\sin(x) + sqrt(3)*\cos(x));$



Если требуется указать конкретную область изменения переменной по оси абсцисс, то добавляем второй аргумент.

$> plot(2*x\verb|^|2-8*x+5, x=-1..5);$

Знак "^" используется для обозначения показателя степени.



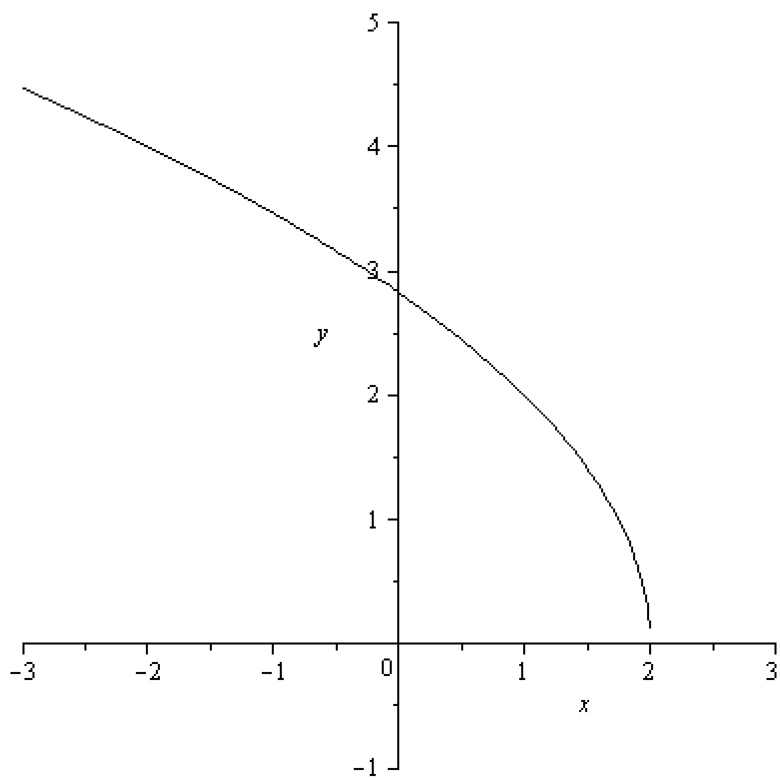
Для построения графика функции при всех заданных нами значений переменной x, программа сделала разный масштаб по осям координат. С помощью третьего аргумента можно задавать область отображения графика по оси ординат.

$> plot(2*sqrt(2-x), x=-3..3, -1..5);$

или так

$> plot(2*sqrt(2-x), x=-3..3, y=-1..5);$

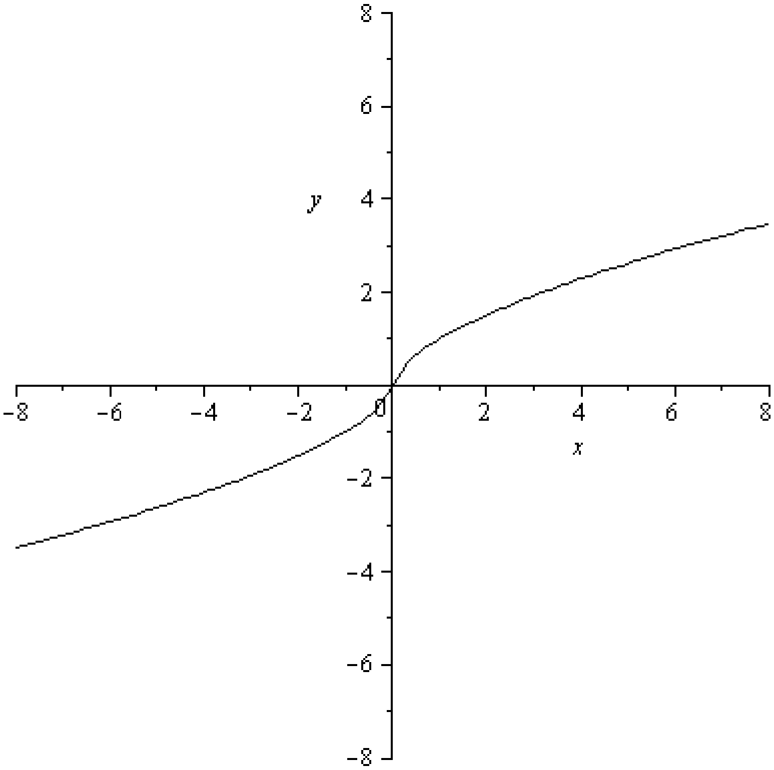
В последней команде явно указано название второй переменной, поэтому ось ординат будет иметь подпись y.



Если в процессе построения графика функции происходит извлечение корней из отрицательных чисел, то указываем, что график строится в действительных переменных, а не в комплексных.

$> with(RealDomain);$

$> plot(x^(3/5), x=-8..8, y=-8..8);$

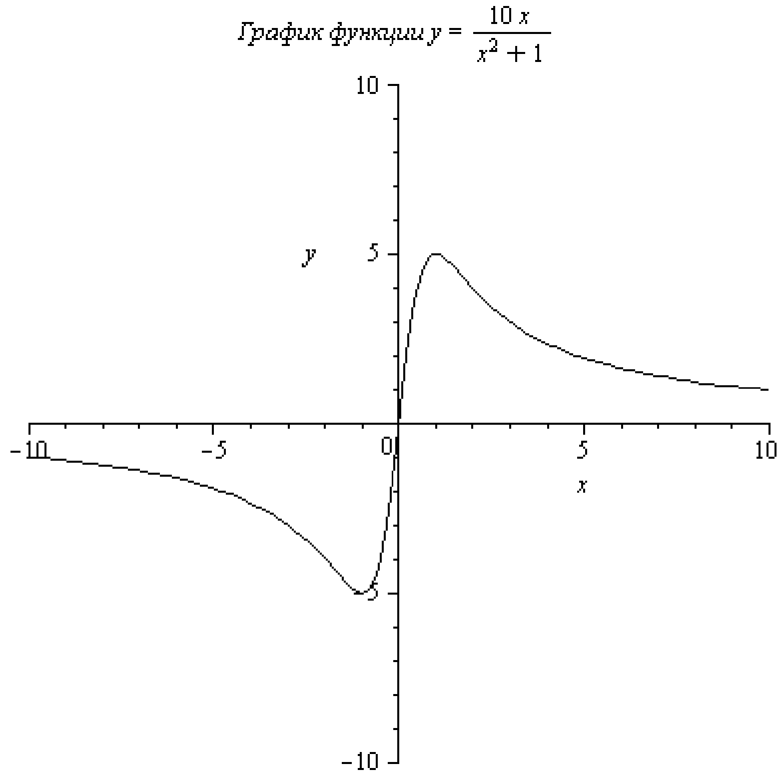


Рассматриваемая нами команда plot имеет множество дополнительных полезных опций.

Опция title служит для добавления заголовка к графику.

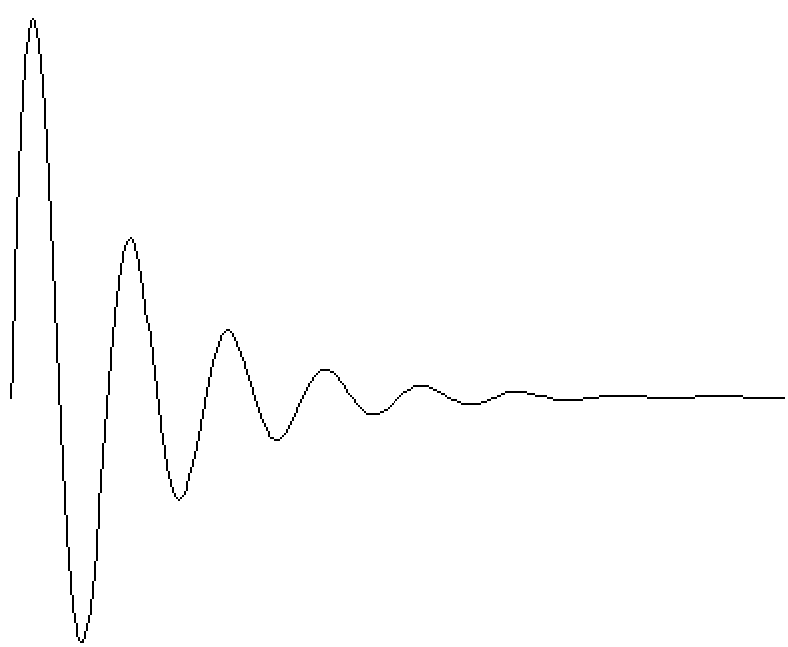
$> plot(10*x/(x\wedge 2+1), x=-10..10, y=-10..10,$

$title=$'График функции y=$\frac{10x}{x^2+1}$');



Удобные возможности предоставляет программа по форме осей координат. Для этого используется команда axes с возможным параметром FRAME, BOXED, NONE и NORMAL. Например, можно начертить лишь эскиз графика без осей координат.

$> plot(6*2\hat{\ }(-x)*\sin(5*x), x=0..10, y=-5..5, axes=NONE);$

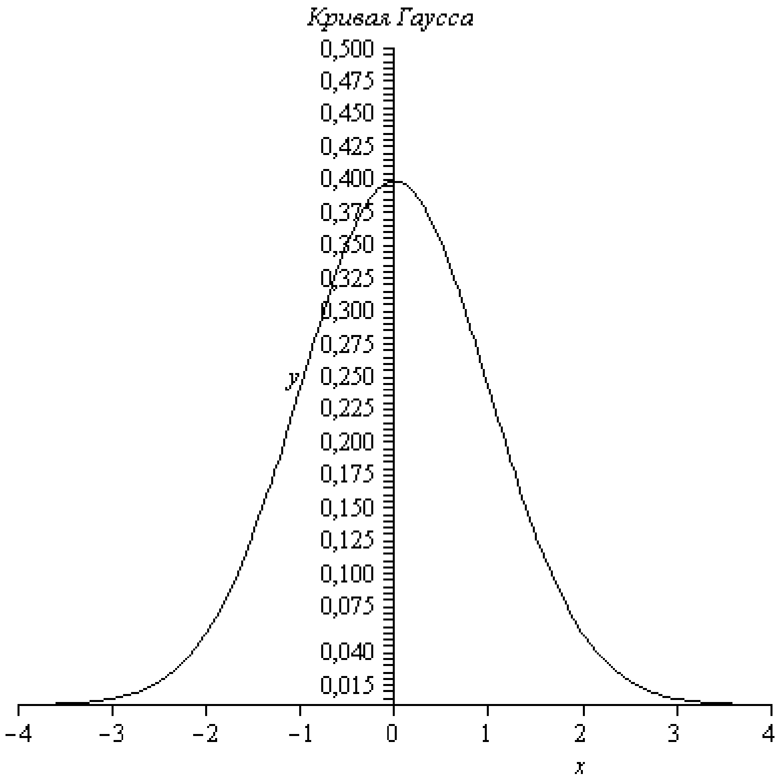


Имеется, также, возможность управления частотой меток на осях координат с помощью команд xtickmarks и ytickmarks.

$$> plot(1/sqrt(2*Pi)*\exp(-x\wedge 2/2), x=-4..4, y=0..0.5,$$

$$xtickmarks=10, ytickmarks=100, title='\text{Êðèâàÿ Ãàóññà}');$$

Отметим, что в программе Maple выражением *Pi* задается число π.

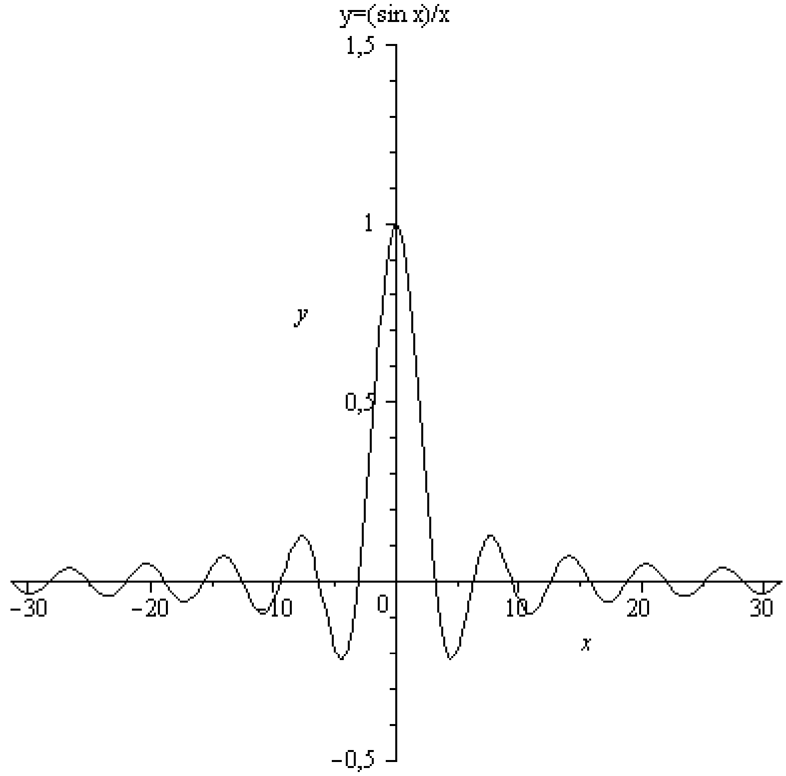


Опцией color можно задать цвет графика. Можно использовать все стандартные цвета просто введя их название. Это особенно удобно, когда на одном чертеже отображаем несколько графиков.

$$> plot(\sin(x)/x, x=-10*Pi..10*Pi, y=-0.5..1.5,$$

$$color=black, title="y=(\sin x)/x");$$

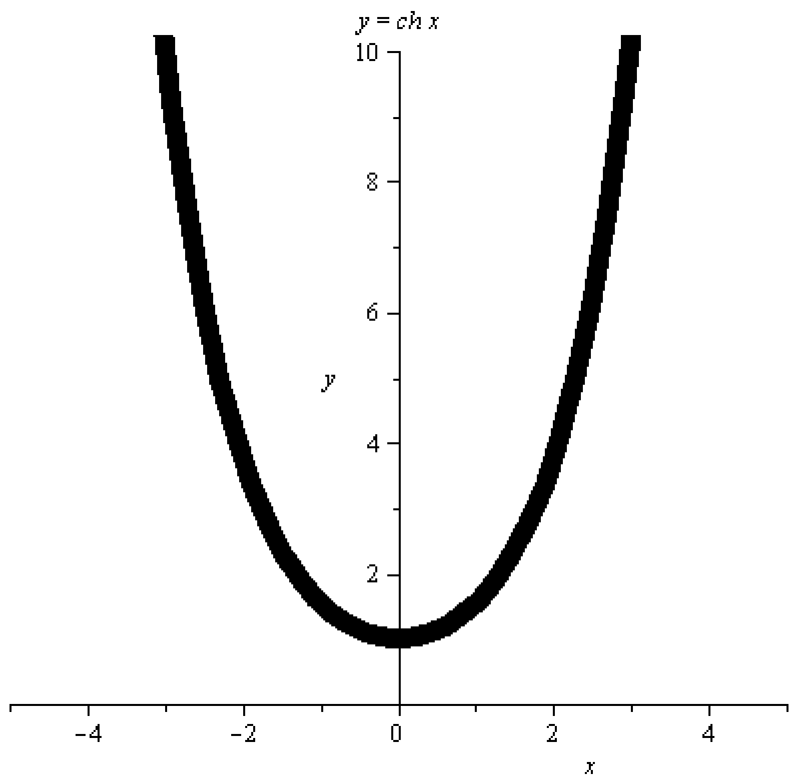
Дополнительно, здесь использованы другие кавычки в оформлении опции title, на чертеже это можно заметить в сравнении с предыдущими графиками функций.



С помощью опции thickness можно выделить нужный нам график

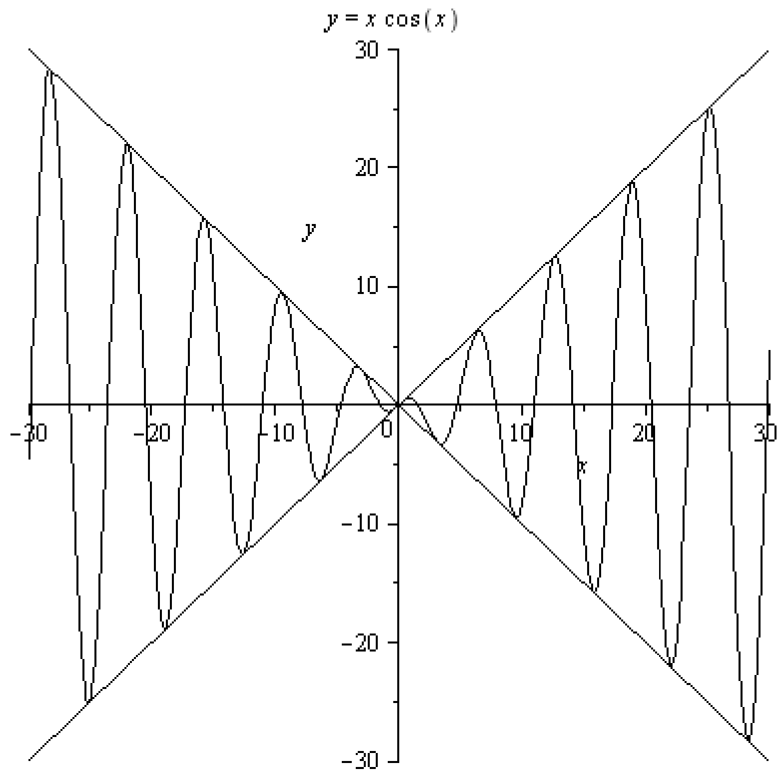
$> plot((\exp(x)+\exp(-x))/2, x=-5..5, y=0..10,$

$thickness=10, color=black, title='y=\mathrm{ch}\,x');$



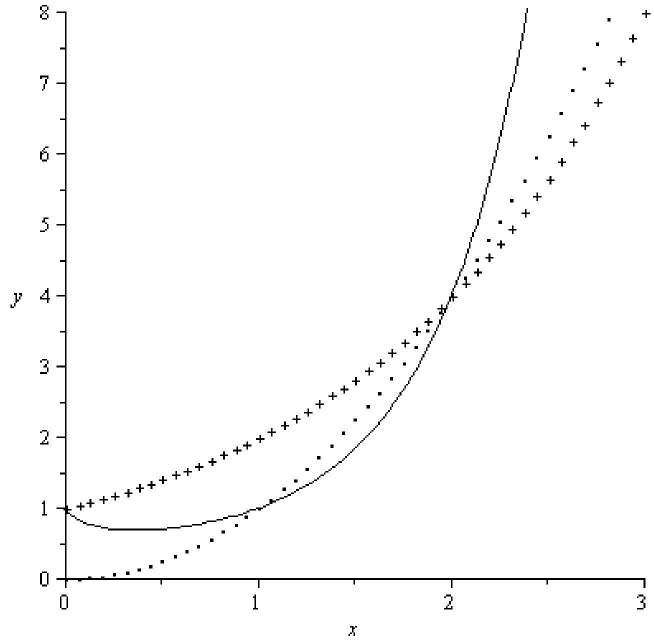
Имеется замечательная возможность построения нескольких графиков на одном чертеже. Для этого они перечисляются через запятую в квадратных скобках.

$> plot([x*\cos(x), x, -x], x=-30..30, y=-30..30);$



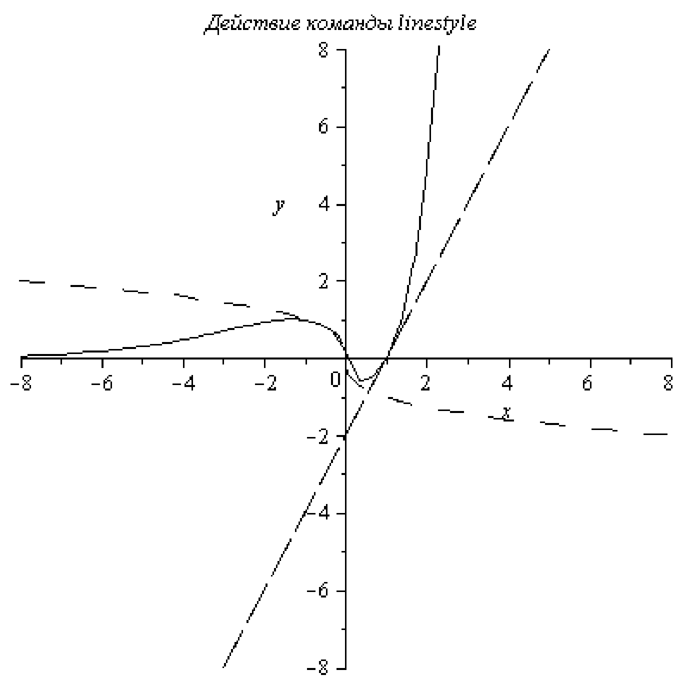
Огромные возможности для изображения графиков функций открывают опции style и linestyle. Продемонстрируем это на нескольких примерах.

$> plot([x^\wedge 2, 2^\wedge x, x^\wedge x], x=0..3, y=0..8,$
$style=[point, point, line], symbol=[point, cross]);$



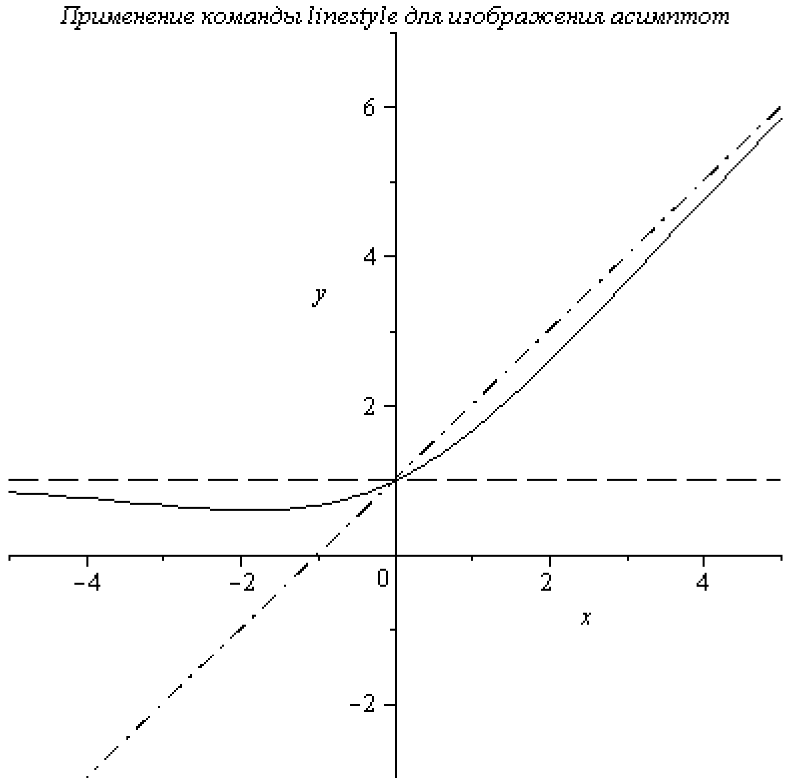
$> with(RealDomain):$

$> plot([(x-1)*x\char`^(1/3)*2\char`^x,-x\char`^(1/3),2*(x-1)],x=-8..8,$
$y=-8..8,linestyle=[solid,spacedash,longdash],color=black);$



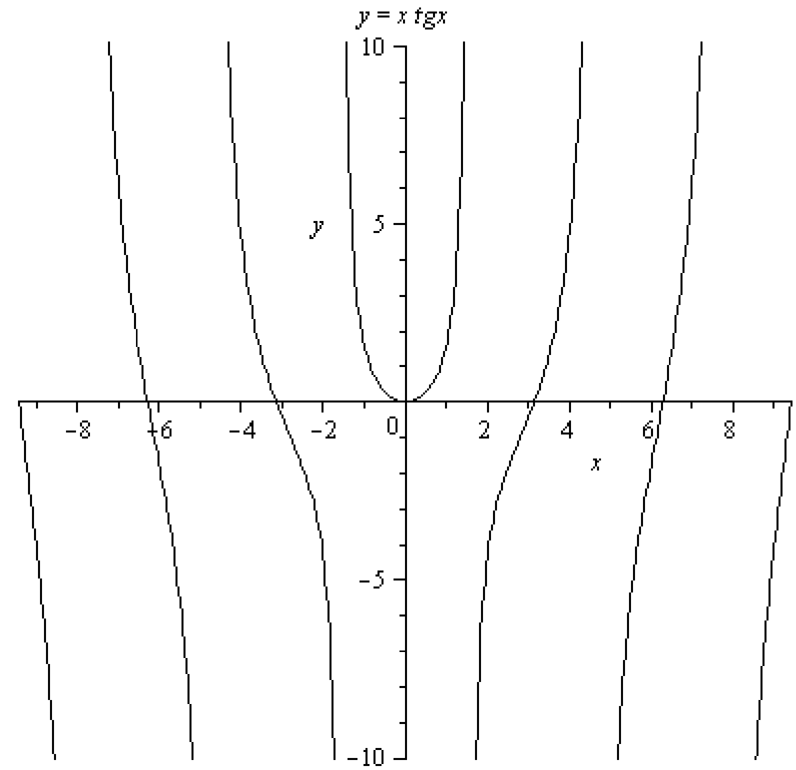
Возможности команды linestyle можно успешно использовать для изображения асимптот графиков.

$> plot([x/(1+2\char`^(-x))+1,1,x+1],x=-5..5,y=-3..7,$
$color=black,linestyle=[solid,dash,dashdot]);$



Если график функции имеет разрывы, то желательно указать опцию discont.

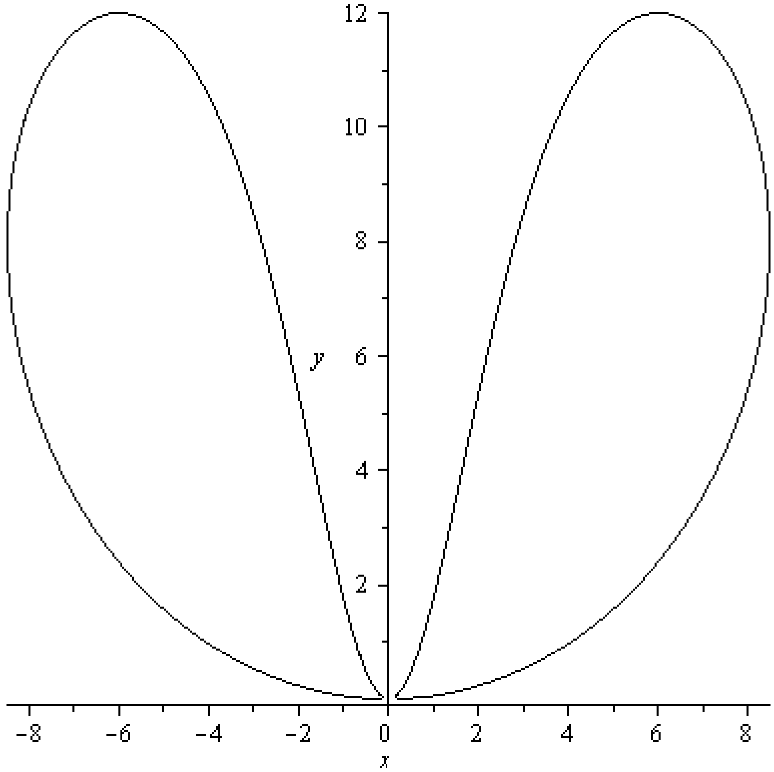
$$> plot(x*\tan(x), x=-10..10, y=-10..10,$$
$$discont=true, color=black, title='x*\mathrm{tg}\,x');$$



Теперь построим кривую, заданную неявным уравнением.

$> with(plots):$

$> implicitplot(x\wedge 4+x\wedge 2*y\wedge 2-18x\wedge 2*y+9*y\wedge 2=0,$
$x=9..9, y=-2..16, color=black);$



Помощь в более глубоком понимании функций окажет школьникам возможность программы Maple строить анимации графиков.

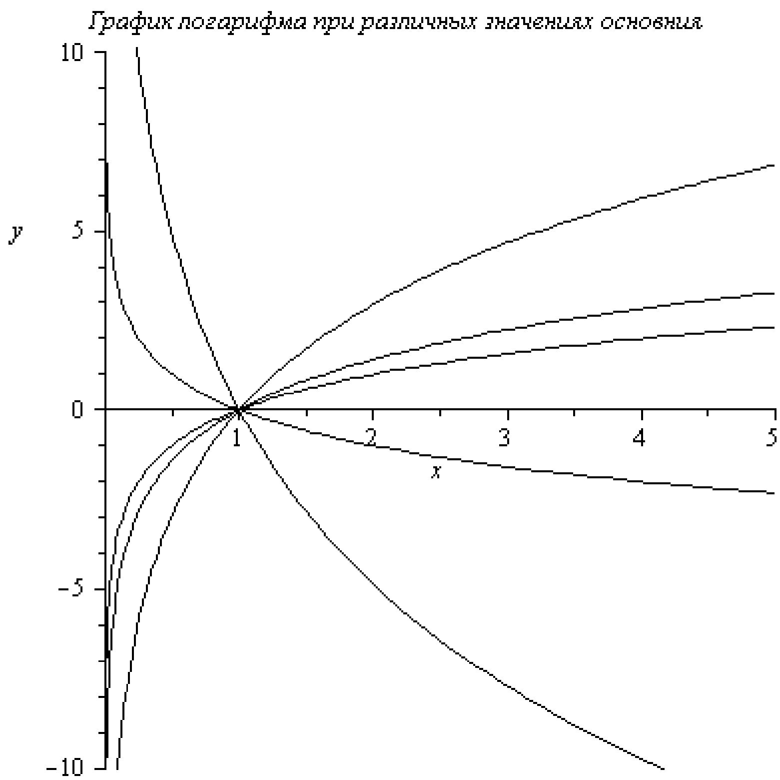
Например, посмотрим, как меняется форма логарифма в зависимости от основания.

$> with(plots):$

$> animate(plot,[\log[b](x), x=0..5, y=-10..10, color=black],$
$b=0.5..2);$

$> animate(plot,[\log[b](x), x=0..5, y=-10..10, color=black],$
$b=0.5..2, trace=4, frames=50);$

При выполнении последней команды помимо анимации на чертеже дополнительно будет зафиксировано несколько графиков при различных значениях параметра.



Одним из удобных применений программы Maple следует считать возможность легкого нахождения и дальнейшего применения производных.

Производные вычисляются с помощью команды diff. Для вычисления производной функции $x \cdot 2^x$ вводим команду

$> diff(x*2\wedge x, x);$

$$2^x + x\,2^x \ln(2)$$

С найденной производной можно производить дальнейшие действия, если обозначить ее какой-нибудь переменной.

$> z := diff(x*2\wedge x, x);$

$$z := 2^x + x\,2^x \ln(2)$$

Например, вычислив производную от функции z, получим вторую производную исходной функции.

$> diff(z, x);$

$$2\,2^x \ln(2) + x\,2^x \ln(2)^2$$

Теперь применим производную для нахождения и построения касательной к графику функции.

Рассмотрим задачу нахождения касательной к графику функции $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Для решения поставленной задачи делаем следующее.

Подключаем пакет графики.

$> with(plots):$

Определяем функцию y.

$> y := -1/2*\cos(2*x + Pi/6);$

$$y := -\frac{1}{2}\cos\left(2\,x + \frac{1}{6}\,\pi\right)$$

Задаем абсциссу точки касания x_0.

$> x0 := Pi/4;$

$$x0 := \frac{1}{4}\,\pi$$

Находим производную функции y и вводим для нее новую функцию, которую обозначим yp.

$> yp := diff(y, x);$

$$yp := \sin\left(2\,x + \frac{1}{6}\,\pi\right)$$

Вычисляем значение ординаты точки касания $y_0 = y(x_0)$ с помощью команды подстановки subs.

$> y0 := subs(x = x_0, y);$

$$y0 := -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)$$

Вычисляем значение производной в точке x_0.

$> yp0 := subs(x = x_0, yp);$

$$yp0 := \sin\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)$$

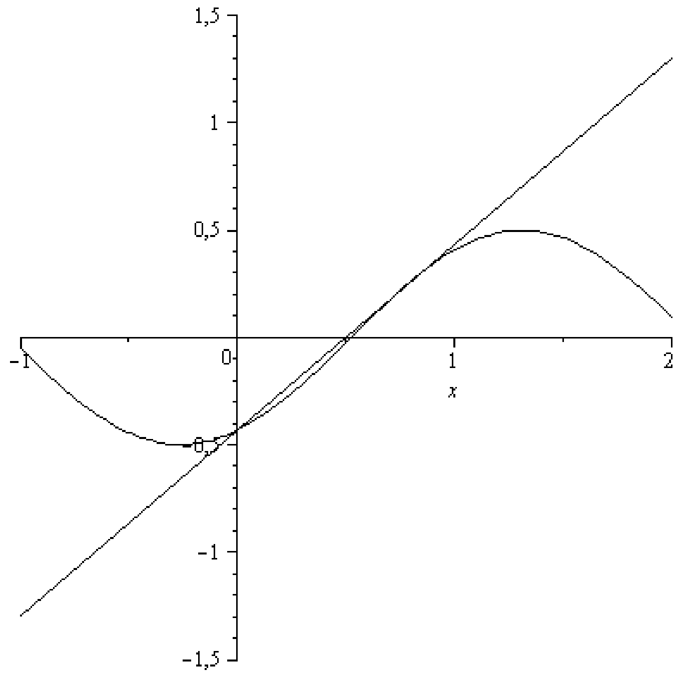
Записываем уравнение касательной.

$> z := y0 + yp0*(x - x0);$

$$z := \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

Строим график исходной функции и график касательной с помощью команды plot.

$> plot([y,z], x=-1..2, -1.5..1.5, color=black);$



Или с помощью команд point и display, тогда у нас появляется, например, возможность отметить на чертеже саму точку касания.

$> with(plots):$

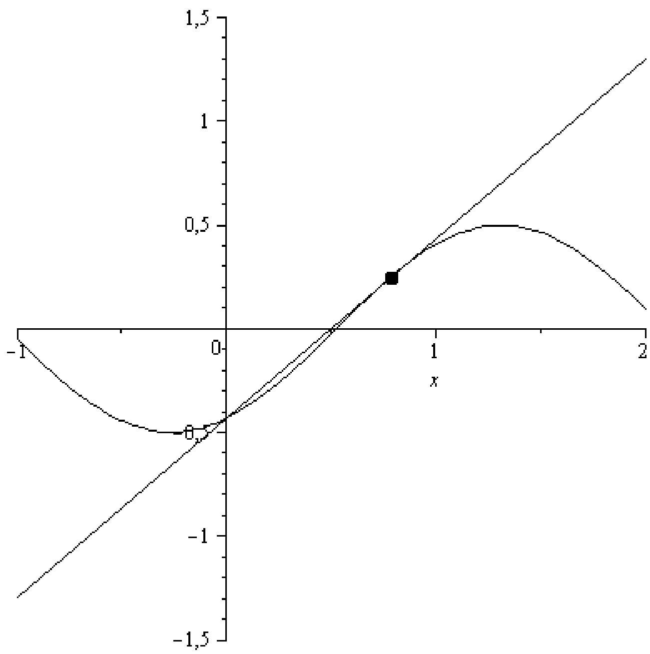
$> with(plottools):$

$> graf1 := plot(y, x=-1..2, -1.5..1.5, color=black);$

$> graf2 := plot(z, x=-1..2, -1.5..1.5, color=black);$

$> graf3 := point([x0, y0], symbol=solidcircle,$
$symbolsize=20, color=black);$

$> display(graf1, graf2, graf3):$



Теперь применим программу Maple для построения графика функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, а также для нахождения точек экстремума и точек перегиба этой функции.

Определяем функцию y.

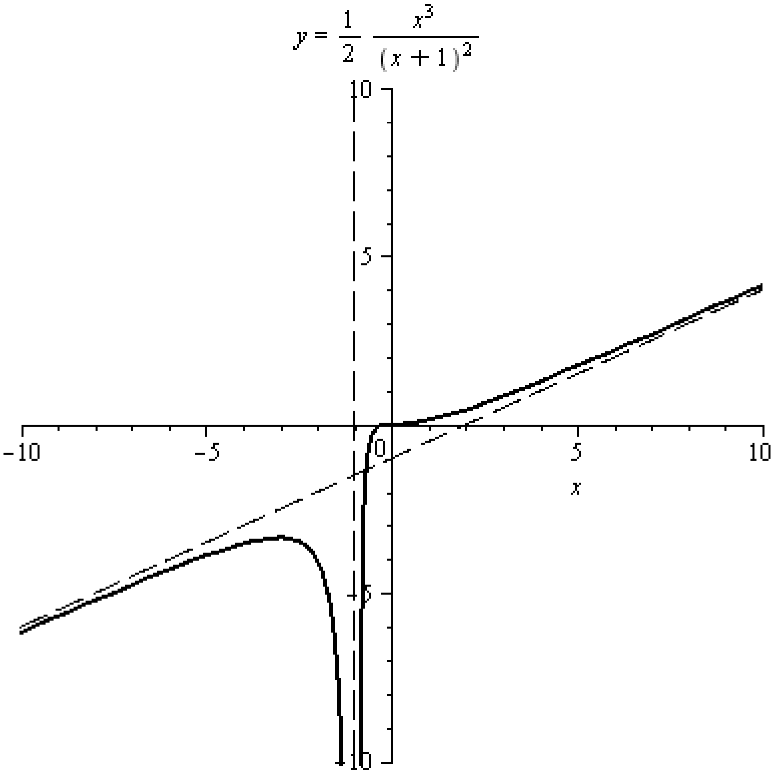
$> y := x \,\hat{}\, 3/(2*(x+1) \,\hat{}\, 2);$

$$y := \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{(x+1)^2}$$

Строим график функции вместе со всеми асимптотами.

$> with(plots):$

$> plot([y, x/2-1, [-1, t, t=-10..10], x=-10..10, -10..10,$
$linestyle=[solid, dash, dash], thickness=[2,1,1], color=black,$
$title='y=x \,\hat{}\, 3/(2*(x+1) \,\hat{}\, 2)');$



Далее найдем точки экстремума изучаемой функции.
Вычисляем производную.

$> yp := diff(y, x);$

$$yp := \frac{3}{2}\frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^3}{(x+1)^3}$$

В случае надобности можем ее упростить с помощью команды simplify.

$> simplify(yp);$

$$\frac{1}{2}\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

Находим кандидаты на точки экстремума функции, для этого ищем нули производной, решая уравнение с помощью команды solve.

$> solve(yp = 0);$

$$0,\ -3$$

Подставляем полученные значения в начальную функцию и находим ординаты точек с помощью команды subs.

$> subs(x=0, y);$

$$0$$

$> subs(x=-3, y);$

$$-\frac{27}{8}$$

Для нахождения точки перегиба вычисляем вторую производную исходной функции, то есть производную от производной.

$> ypp := diff(yp, x);$

$$ypp := \frac{3\,x}{(x+1)^2} - \frac{6\,x^2}{(x+1)^3} + \frac{3\,x^3}{(x+1)^4}$$

Упростим вторую производную.

$> simplify(ypp);$

$$\frac{3\,x}{(x+1)^4}$$

Найдя нуль второй производной, получим точку перегиба.

$> solve(ypp=0);$

$$0$$

Значение функции в этой точки уже было вычислено выше.

5. ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.

5.1. Что такое решение уравнения? Точность решения

Рассмотрим результаты, которые Maple получает на основании встроенных алгоритмов при помощи разнообразных вариантов команды “solve” (решить!). Примеры применения команды

$> solve(x^2 - x = 2025, x)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8101},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8101}$$

Можно решать уравнение с дополнительными условиями

> $solve(\{x+y<10, x^2=9\}, [x,y])$

$$[[x=3, y<7], [x=-3, y<13]]$$

Или даже наложив дополнительные ограничения

> $solve(\{x+y<10, x^2=9\}, [x,y])$ assuming $10<y$

$$[[x=-3, y<13]]$$

Если Maple не может найти точного решения, ответ включает выражение RootOf .

> $solve(x^4-x^3=-1)$

$$RootOf(\_Z^4-\_Z^3+1, index=1), RootOf(\_Z^4-\_Z^3+1, index=2), RootOf(\_Z^4-\_Z^3+1, index=3), RootOf(\_Z^4-\_Z^3+1, index=4)$$

За счет наличия простого корня следующее уравнение можно решить, но появляются комплексные корни (I - мнимая единица); чтобы их не было в ответе, надо использовать действительные числа - это последующая строка

> $solve(x^4-x^3=8)$

$$2, -\frac{1}{3}\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}+\frac{5}{3\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}-\frac{5}{6\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}-\frac{5}{3\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}\right),$$
$$\frac{1}{6}\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}-\frac{5}{6\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}-\frac{5}{3\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}\right)$$

> **use** *RealDomain* **in** $solve(x\hat{}4-x\hat{}3=8)$ **end use**

$$2, -\frac{1}{3}\,\frac{\left(46+3\sqrt{249}\right)^{2/3}-5+\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}{\left(46+3\sqrt{249}\right)^{1/3}}$$

Команда fsolve находит корни приближенными методами в виде десятичной дроби:

> $fsolve(x^4 - x^3 = 8, x)$

$$-1.477967243,\ 2.$$

Кроме действительных, можно находить и комплексные корни:

> $fsolve(x^4 - x^3 = 8, x, complex)$

$$-1.477967243,\ 0.2389836215 - 1.627669118\ I,$$
$$0.2389836215 + 1.627669118\ I,\ 2.$$

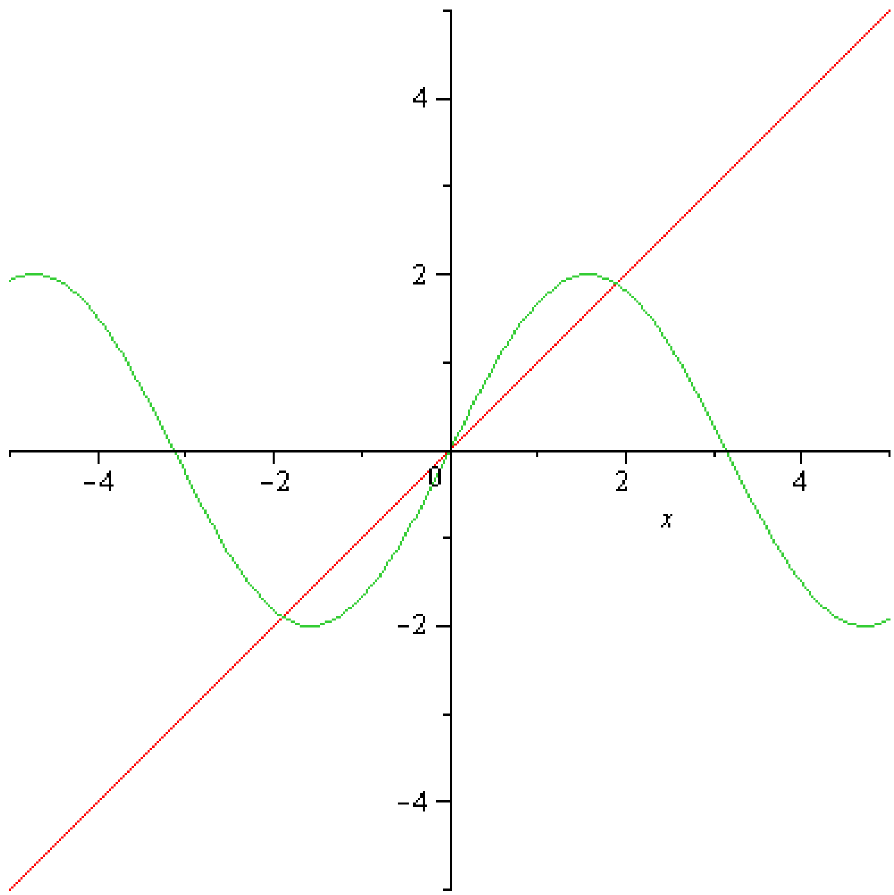
В более сложных (не полиномиальных) случаяхбудет найден только один корень:

> $fsolve(x = 2\sin(x))$

$$0.$$

А какой вам корень нужен? Посмотрим на график:

> $plot([x, 2\sin(x)], x = -5..5)$



Нужен x, примерно равный 2? Подскажем это команде:

> $fsolve(x = 2\sin(x), x = 2)$

$$1.895494267$$

Точность недостаточна? Потребуем 50 значащих цифр:

> $Digits := 50 : fsolve(x = 2\sin(x), x = 2)$

$$1.8954942670339809471440357380936016917513466273\text{'}$$
$$854$$

Наконец, надо знать о возможности "выразить" переменную x из уравнения

> $solve(x^2 - 5\,x \cdot y + 6\,y^2 = 0, x)$

$$2\,y,\ 3\,y$$

> $solve(x^2 - 5\,x \cdot y + 6\,y^2 = 1, x)$

$$\frac{5}{2}\,y + \frac{1}{2}\,\sqrt{y^2+4},\ \frac{5}{2}\,y - \frac{1}{2}\,\sqrt{y^2+4}$$

5.2. Графическое определение количества решений уравнения

.

Если квадратные уравнения решали уже древние греки, то способы решения алгебраических уравнений третьей и четвёртой степени были открыты лишь в XVI веке. Эти классические способы дают точные значения корней и выражают их через коэффициенты уравнения при помощи радикалов различных степеней. Однако эти способы приводят к громоздким вычислениям и поэтому имеют малую практическую ценность.

В отношении алгебраических уравнений пятой и высших степеней доказано, что в общем случае их решения не выражаются через коэффициенты при помощи радикалов. Не выражаются в радикалах, например, корни уже такого простого по виду уравнения, как:

$$x^5 - 2x - 4 = 0$$

Сказанное, однако, не означает отсутствия в науке методов решения уравнения высших степеней. Имеется много способов приближенного решения уравнений -алгебраических и неалгебраических (или, как их называют, трансцендентных), позволяющих вычислять их корни с любой, заранее заданной степенью точности, что для практических целей вполне достаточно.

На простейших из таких способов мы и остановимся, причём речь будет идти о вычислении действительных корней.

Пусть нужно решить уравнение:

$$x^5 - 4x - 2 = 0$$

Если обратиться к рисунку, то каждый корень уравнения (1) представляет собой абсциссу точки пересечения графика функции

$y = F(x)$

с осью Ox (рисунок 1)

> $plot(x^5 - 4\,x - 2, x = -2\,..3, y = -6\,..8);$

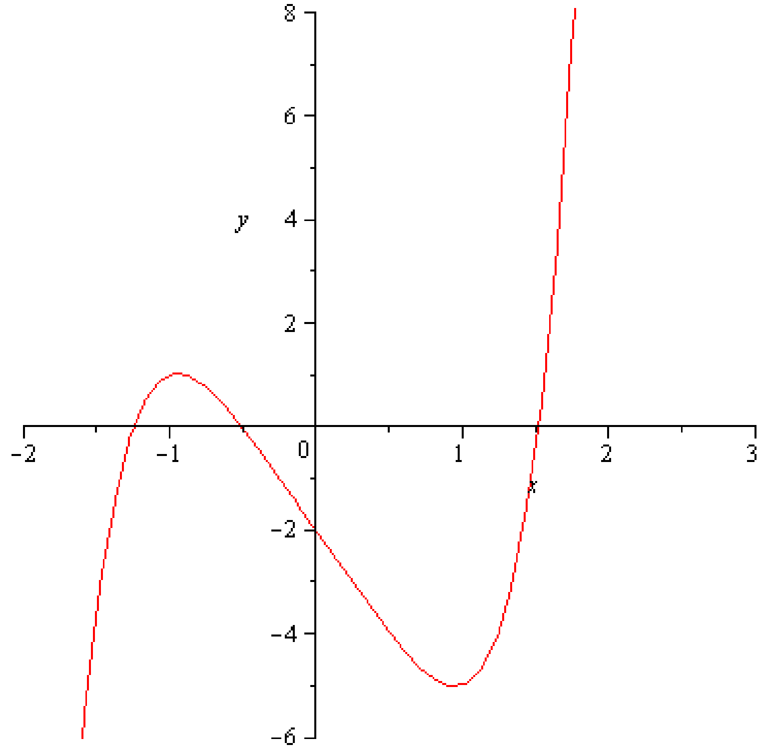


Рис.1

С помощью графика функции или каким-нибудь иным способом обычно удаётся установить приблизительные значения корней. Это позволяет для каждого корня получить грубые приближения по недостатку и по избытку. Такого рода грубых приближений во многих случаях оказывается достаточно, чтобы, отправляясь от них, получить все значения корня с требуемой точностью. 0.5 этом и пойдёт речь.

Итак, пусть корень ξ уравнения (1) "зажат" между двумя его приближениями а и b по недостатку и по избытку $a<\xi<b$. При этом будем предполагать, что $F(x), F'(x)$ и $F''(x)$ непрерывны на отрезке [а, b], причём $F'(x)$ и $F''(x)$ сохраняют знак. Сохранение знака у $F'(x)$ говорит о монотонности $F(x)$ (и, следовательно, $F(a)$ и $F(b)$ имеют разные знаки). Сохранение же знака у $F''(x)$ означает, что выпуклость кривой $y=F(x)$) для всех х отрезка [а, b], обращена в одну сторону. На рисунке №2

а), б), в), г) изображены 4 случая, отвечающих возложенным комбинациям знаков у $F'(x)$ и $F''(x)$

$$plot([x^2, 2x], x=0..2);$$

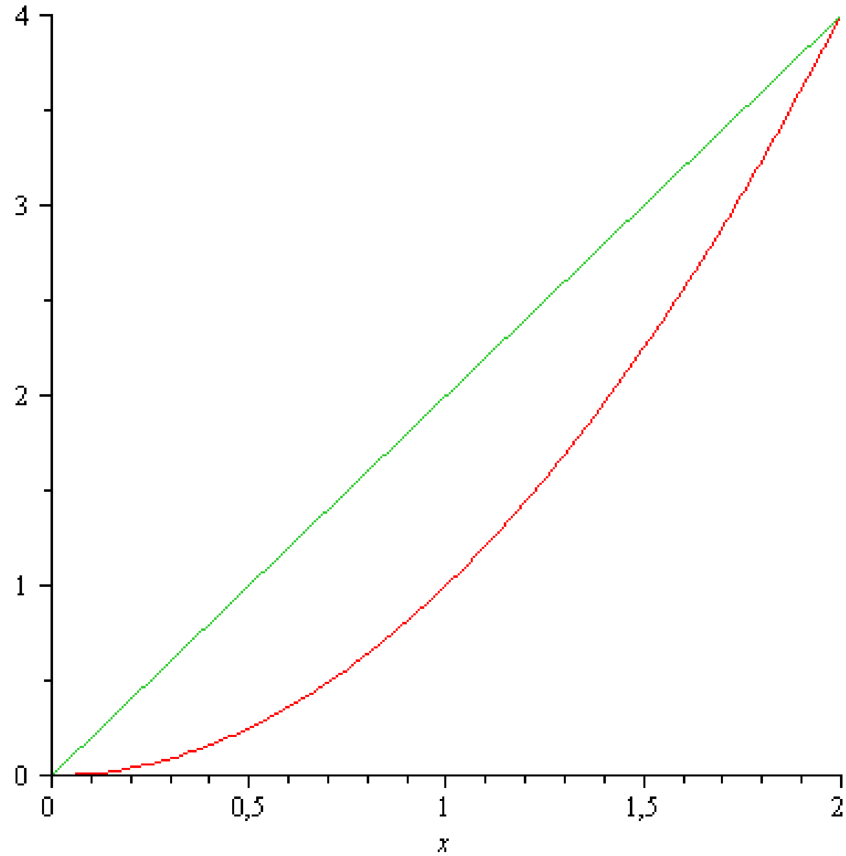


Рис 2 а. $F' > 0, F'' > 0$

> $plot([4 - x^2, 4 - 2x], x = 0..2);$

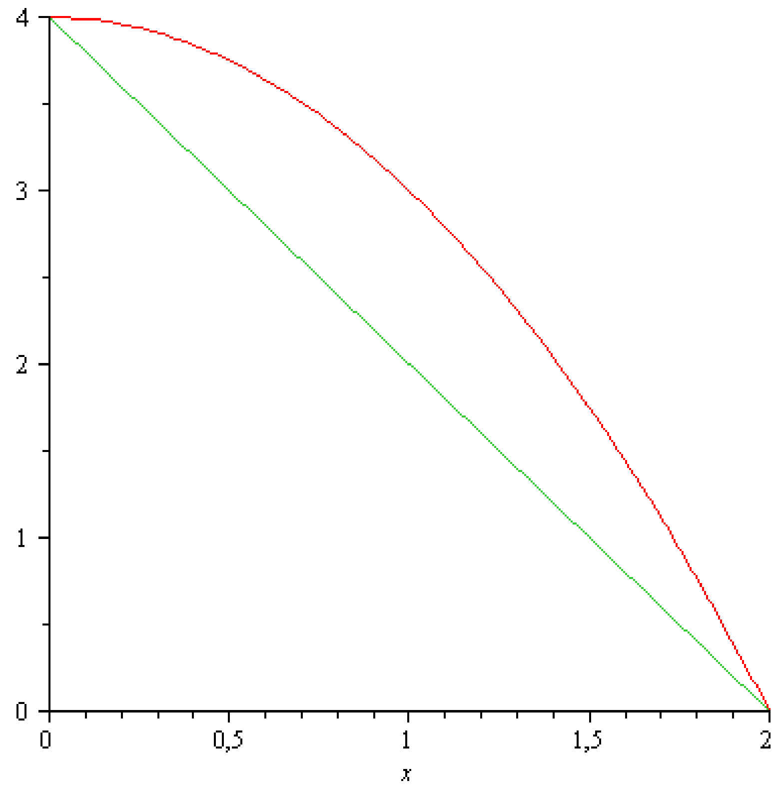


Рис 2б. $F' < 0, F'' < 0$

> $plot([4-(x-2)^2, +2x], x = 0..2);$

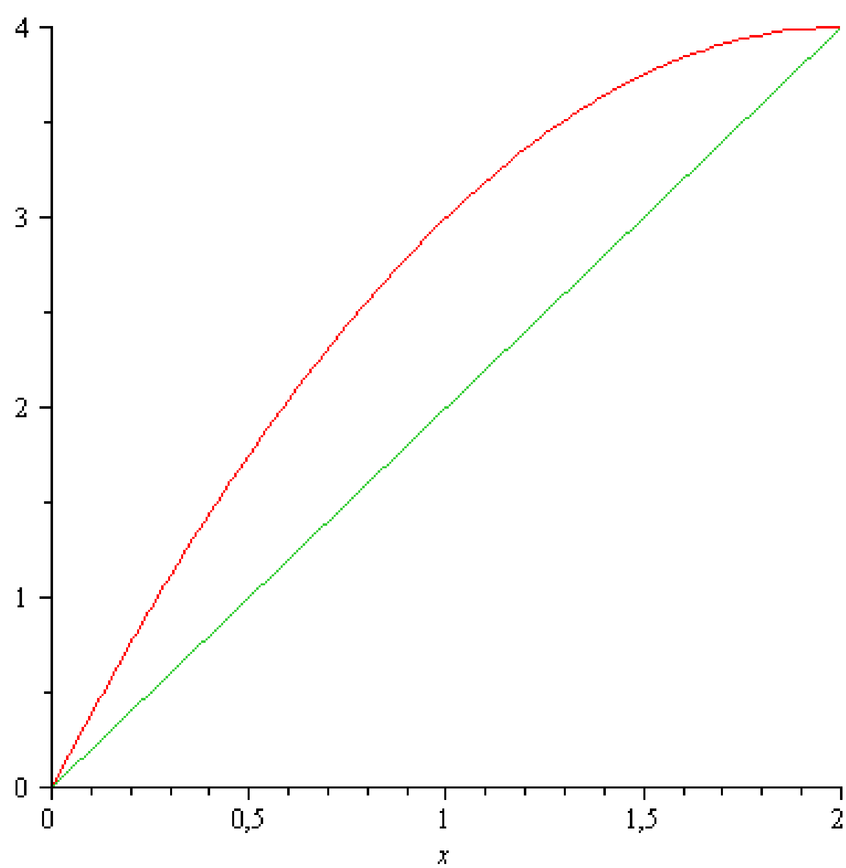


Рис.2в. $F' > 0, F'' < 0$

$> plot([(x-2)^2, 4-2x], x = 0..2);$

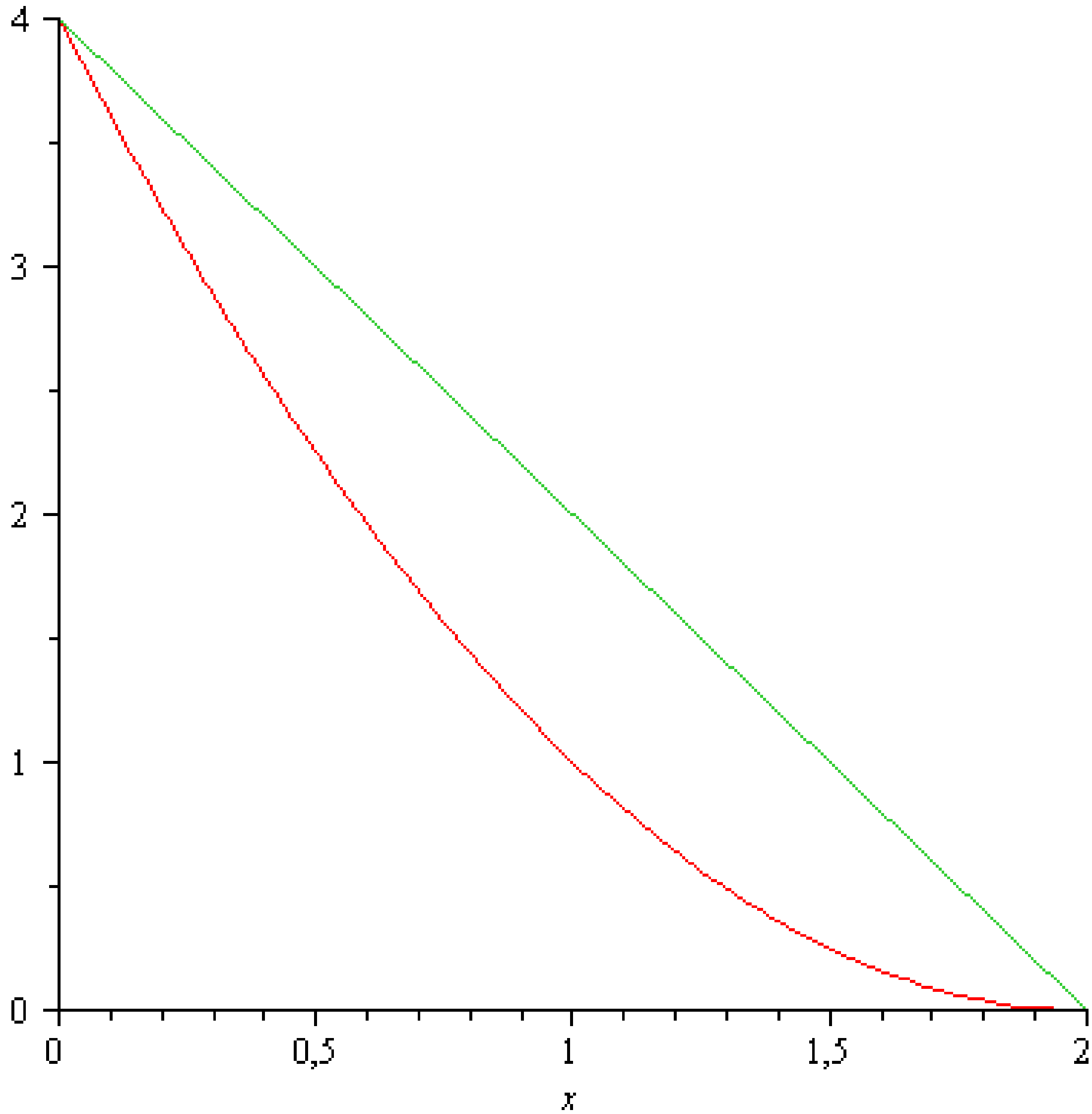


Рис2г $F' < 0, F'' > 0$

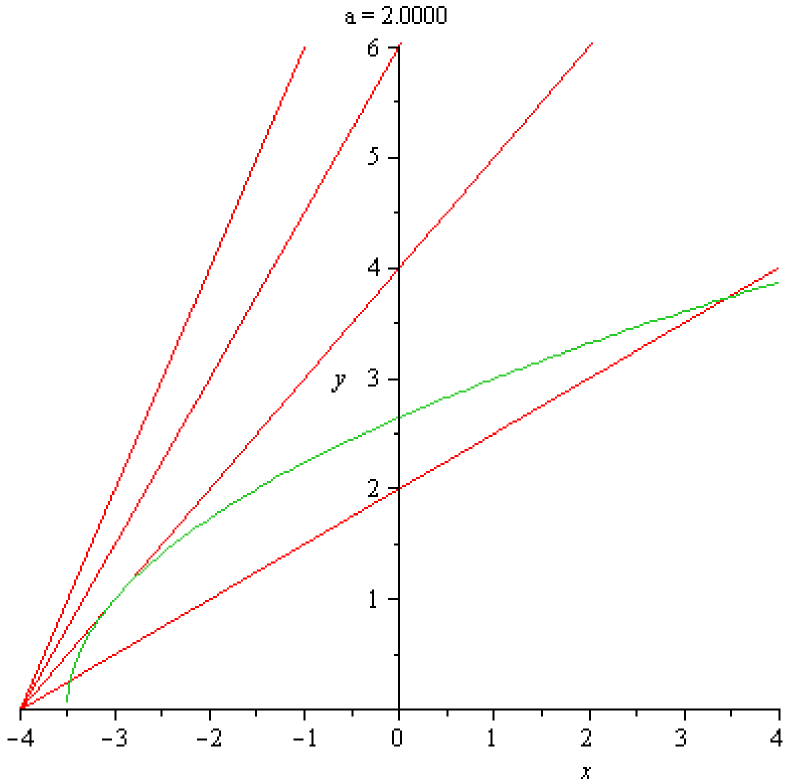
5.3. Приближенное решение уравнений в Maple

Отделение корней при помощи программы MAPLE

Если задача состоит в том, чтобы исследовать, сколько корней имеет уравнение

$$a \cdot (x+4) = \sqrt{2x+7}$$

при разных $a \in [0;2]$,то мы строим графики правой и левой части при разных $a \in [0;2]$



Мы видим, что при

$a \in [0;1)$ – два решения,

$a = 1$ – одно решение,

$a \in (1;2]$ – нет решений.

Задача. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r \\ y = x + 1 \end{cases}$$

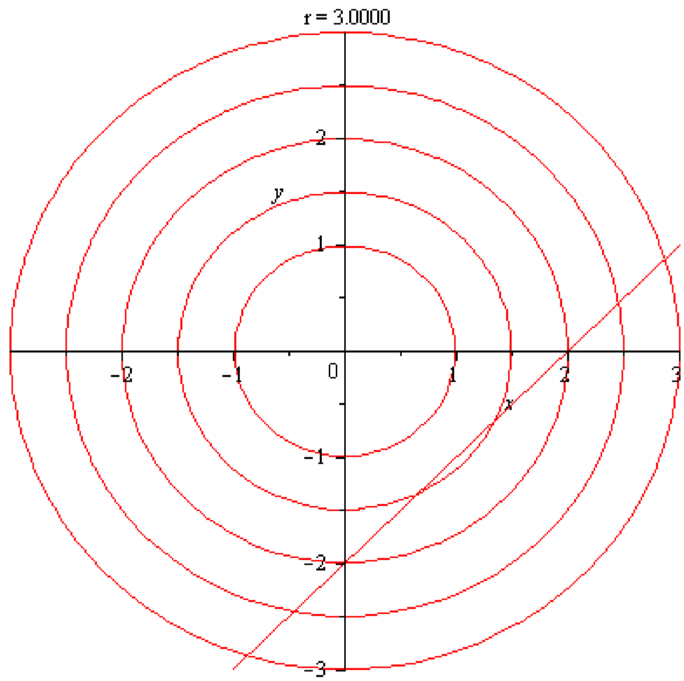


Рис.2

По рисунку видим, что при $r < r_0$ решений нет, при $r = r_0$ -- одно решение, при $r > r_0$ – два решения.

<u>Задача 3</u> Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{9 - x^2} = x + a \ ?$$

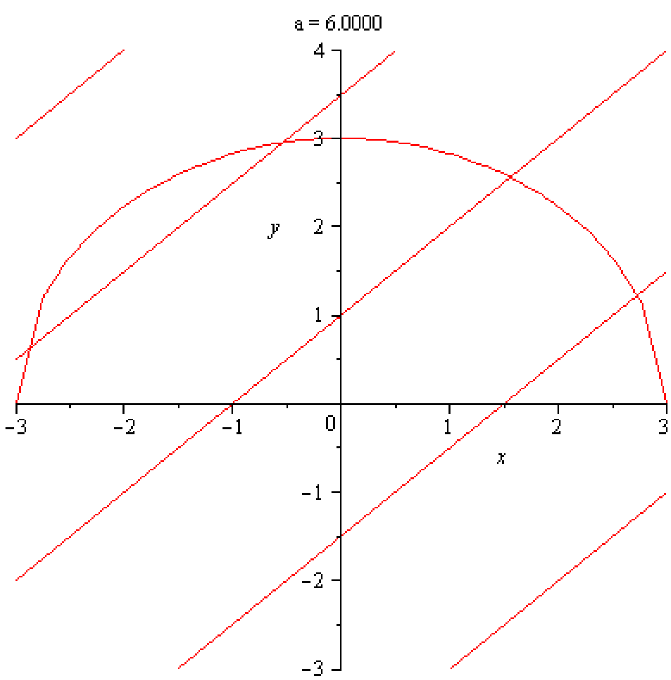


Рис. 3 Прямые соответствуют разным значениям *a*

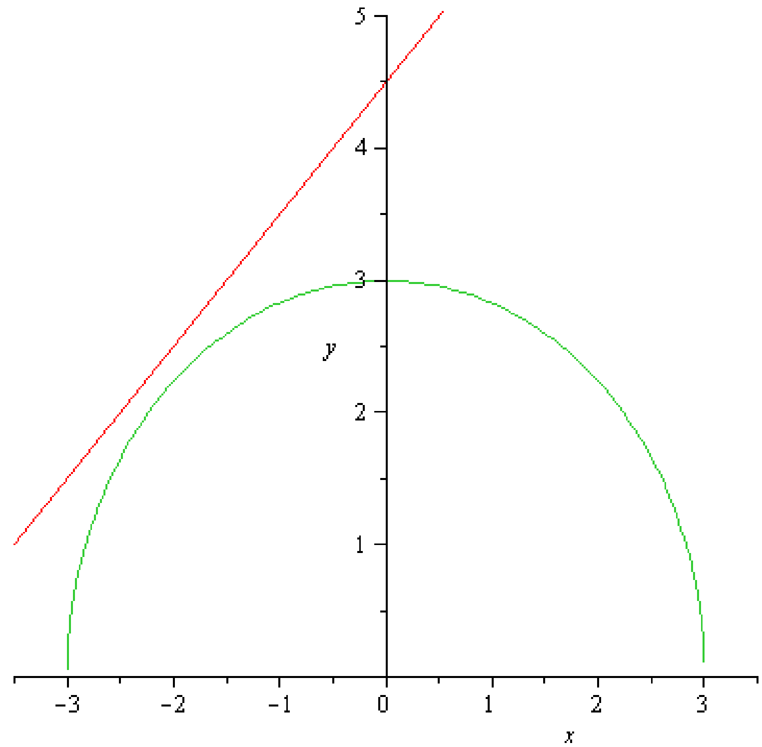


Рис. 4 При $a = -4.5$ нет решений

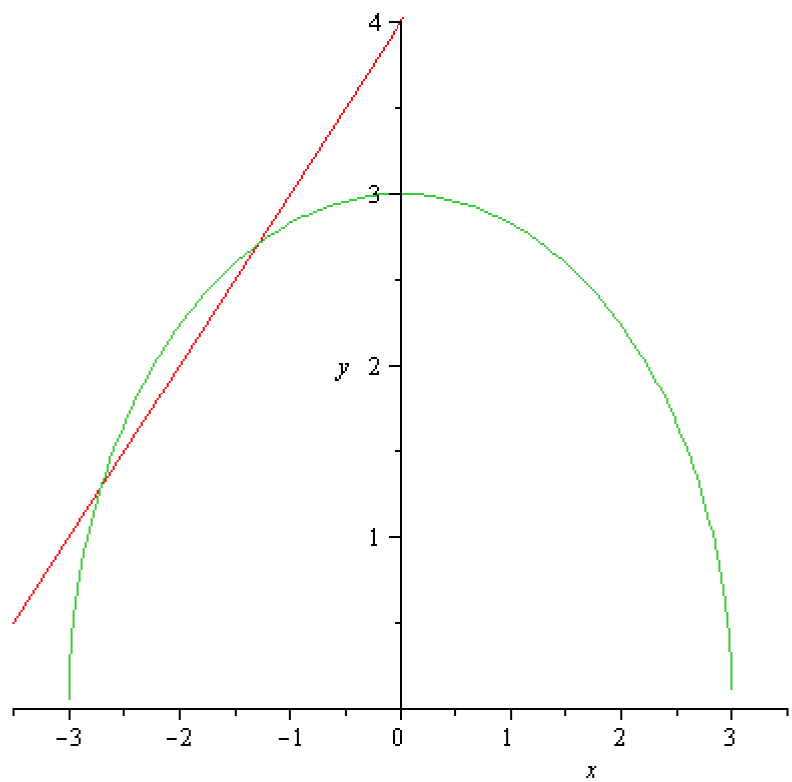


Рис.5. $a = 4$ – два решения.

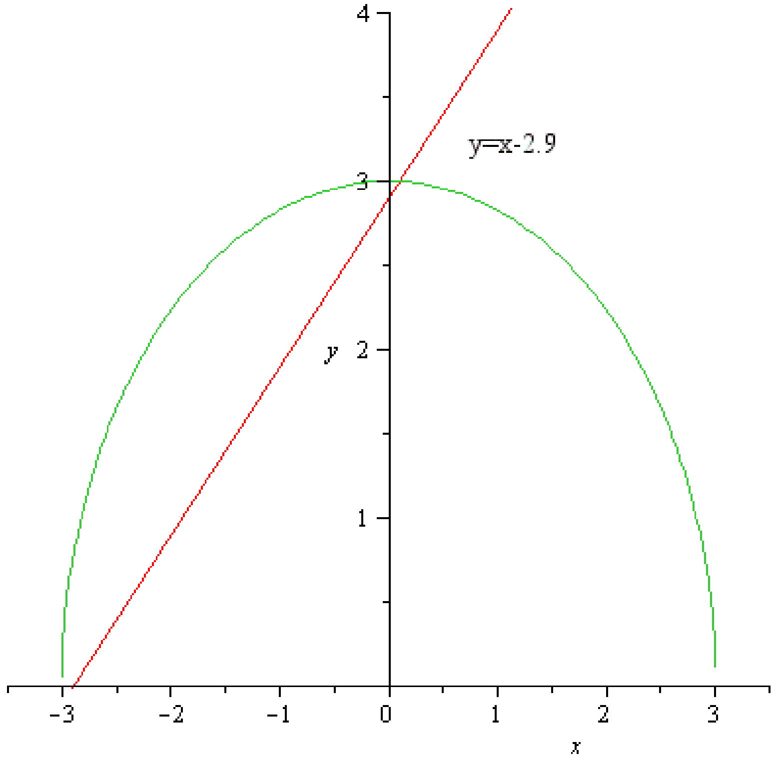


Рис.6. $a = 2.9$ – одно решение

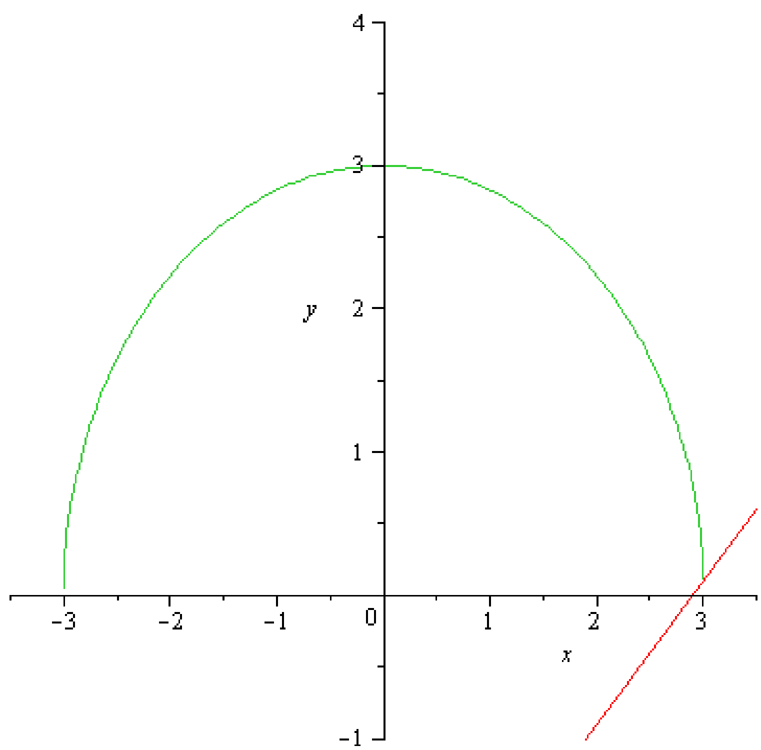


Рис.7. $a = -3$ – одно решение

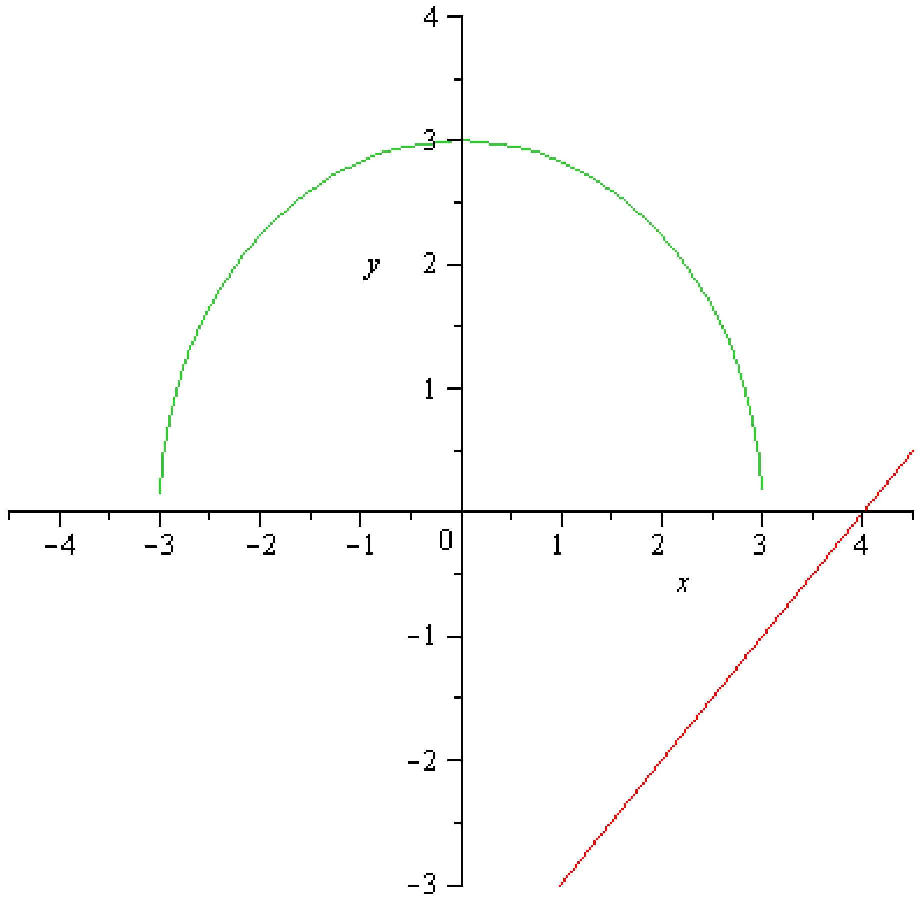


Рис. 8. a=-4 нет решений

5.4. Методы хорд и касательных

МЕТОД ХОРД

Пусть на отрезке $[a_0;b_0]$лежит только один корень ξ равнения

$$f(x)=0$$

Корень ξ представляет собой пересечение графика функции $y=f(x)$ с осью Ox (см. рис 9).

$> plot([x^2-2, 2x-2], x=-1..3);$

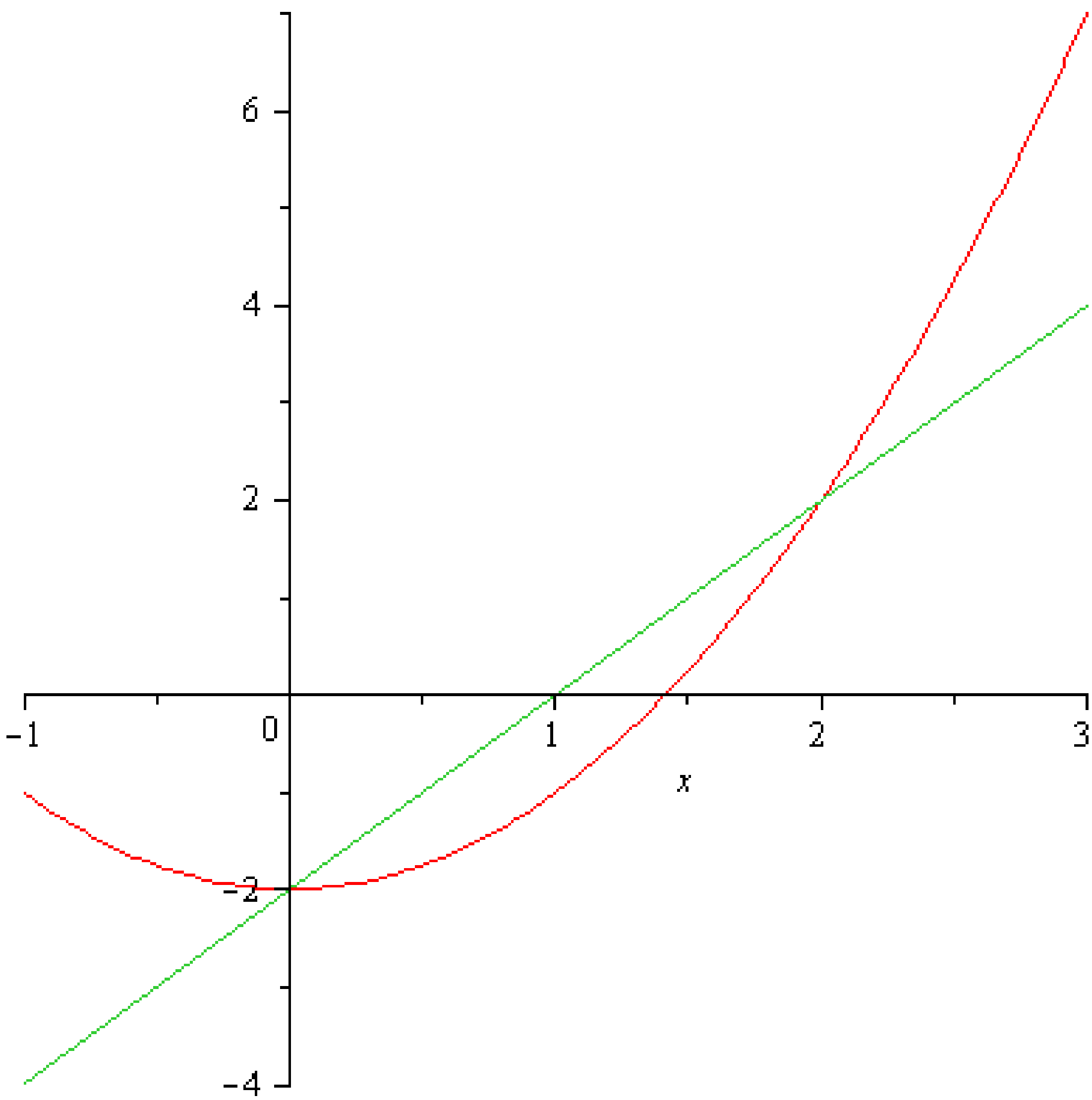


Рис. 9.

Заменим дугу $\breve{AB}$ хордой AB, найдем точку пересечения x_1 этой хорды с осью Ox. Это будет первое приближение. Потом построим хорду CB, получим точку x_2 и так далее.

Прямая $A(a_0; f(a_o))$ $B(b_0; f(b_0))$ имеет уравнение:

$$\frac{y - f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{x - a_0}{b_0 - a_0}$$

Положив в нем $y = 0$ найдем x_1:

$$x_1 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(a_0)$$

Для того, чтобы найти следующее приближение x_2, надо из двух отрезков $[a_0; x_1]$ и $[x_1; b_0]$ выбрать тот, на котором лежит корень ξ, а это тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки.

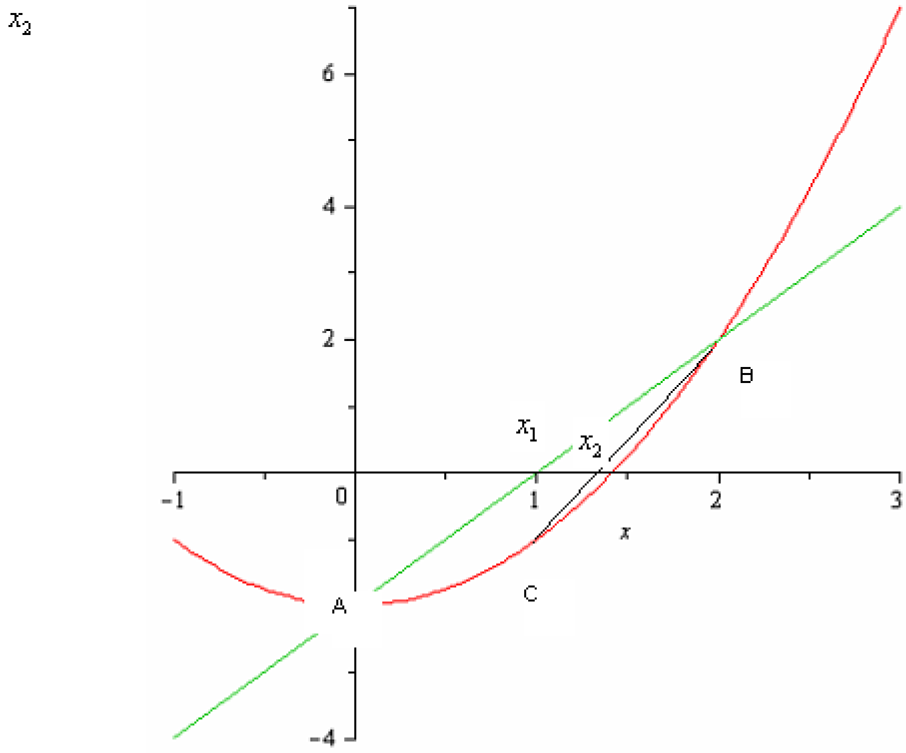


Рис 9-а

Для функции на последнем графике, $f(x) = x^2 - 2$,

$$x_1 = 1,$$

а

$$x_2 = 1 - \frac{2-1}{2-(-1)}(-1) = \frac{4}{3},$$

и так далее.

МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ

Пусть на отрезке $[a_0; b_0]$ содержится только один корень ξ уравнения. (Далее в качестве примера рассматривается $f(x) = x^2 - 2$. на отрезке [0; 2])

Проведем касательные к кривой $y = f(x)$ в ее концах, точках $A(\frac{1}{2}; \frac{-7}{4})$ и $B(2;2)$.

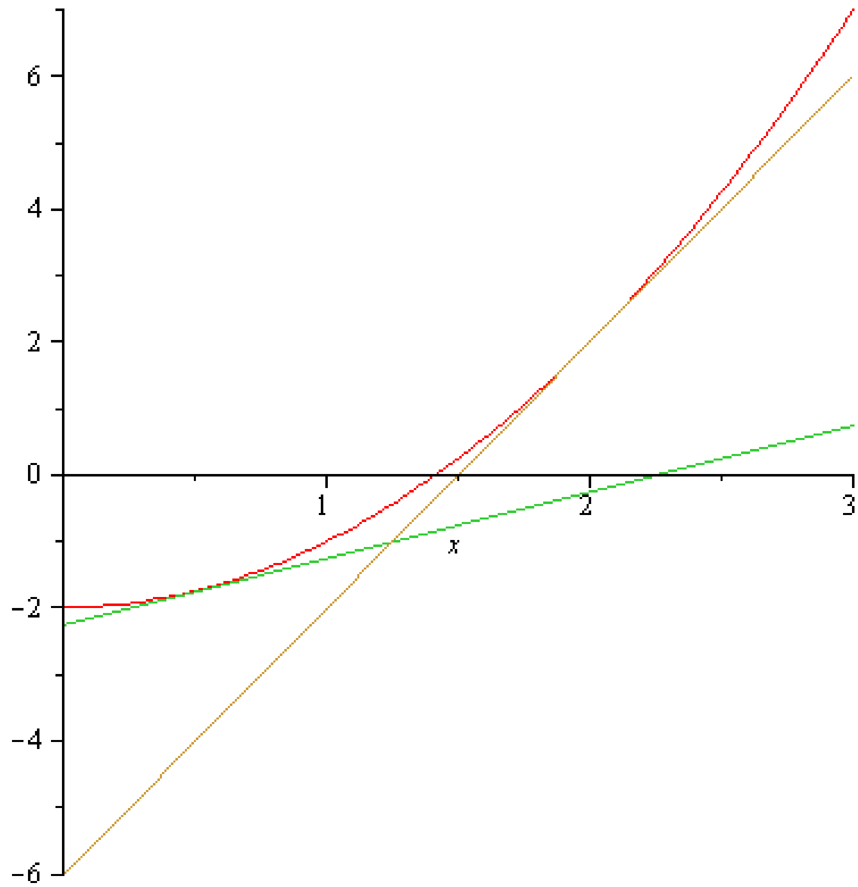


Рис.10

Обозначим абсциссы точек пересечения касательных с осью Ox через x_1' и x_1, каждую из этих точек можно было бы взять за приближенное значение корня. Целесообразно взять ту из этих двух точек, которая лежит между корнем и абсциссой точки касания. На рис. 4 такой точкой будет x_1 причем в этой точке функция и вторая производная имеют один и тот же знак: $f(b_0) > 0$ и $f''(b_0) > 0$.

Новую касательную проводим в точке $[x_1; f(x_1)]$ и находим точку пересечения x_2.

Если имеется отрезок $[a_k; b_k]$, отделяющй корень ξ, то уравнение касательной, проведенной в точке $[a_k; f(a_k)]$ следующее:

$$y - f(a_k) = f'(a_k)(x - a_k)$$

Положив $y = 0, u \cdot x = a_{k+1}$

$$f(a_k) = f'(a_k)(a_{k+1} - a_k),$$

Получим

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$$

Если касательная проведена в точке $[b_k; f(b_k)]$, то

$$b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}$$

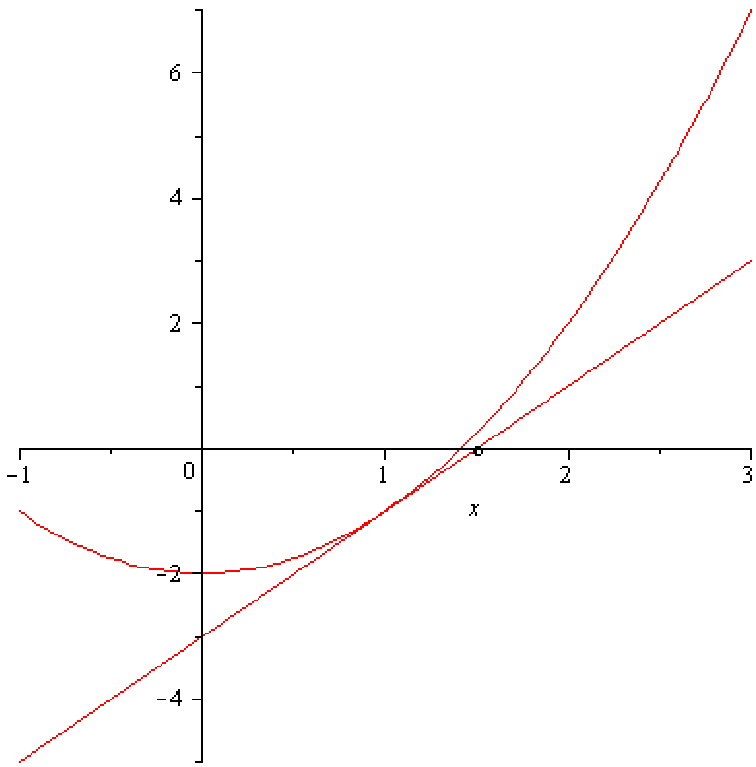


Рис 11. $a_0 = 1, a_1 = 1.5$

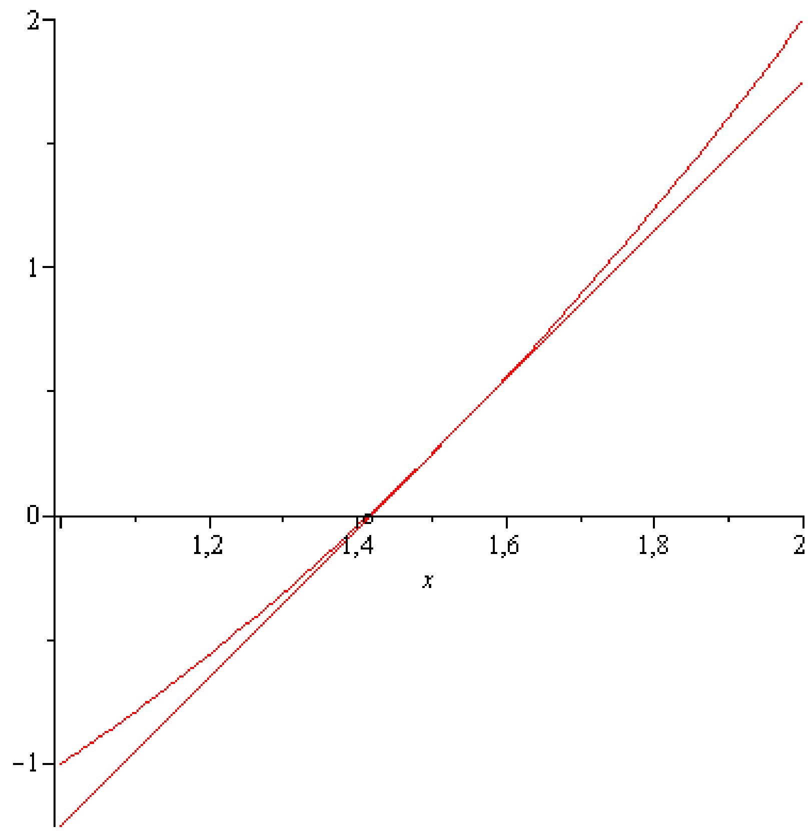


Рис 12. $a_2 = 1.41$

Будем проводить касательную на правом конце отрезка

$b_0 = 2$

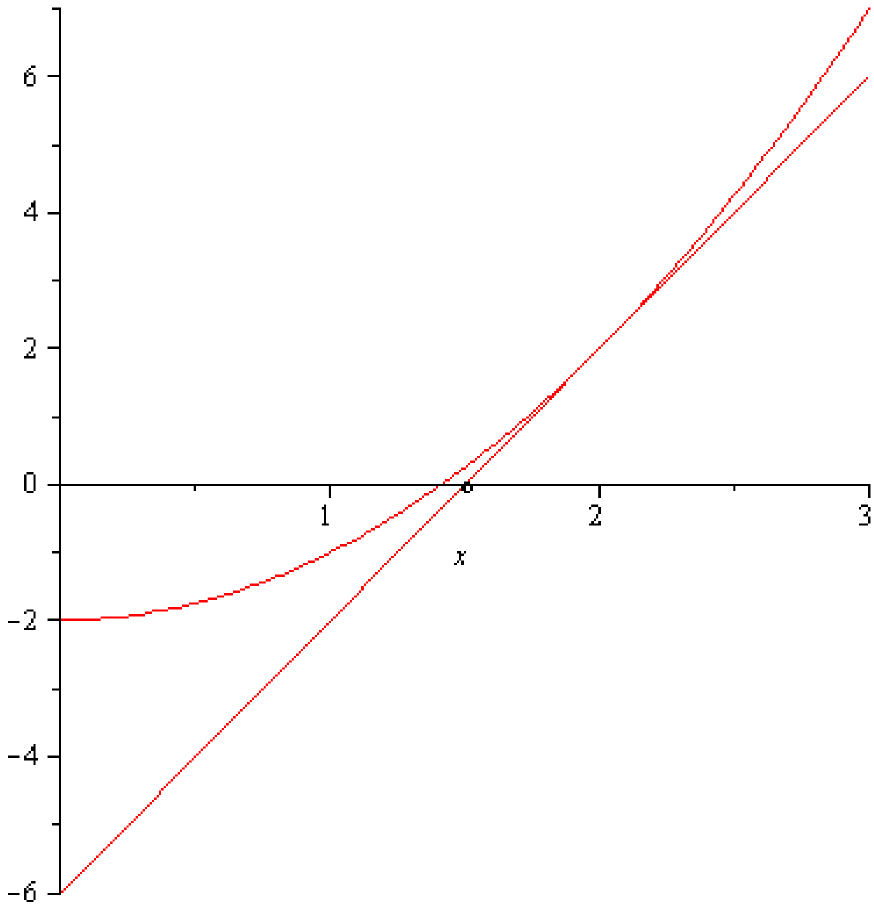


Рис.13. $b_1 = 1.5$

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

По методу касательных целесообразней касательные проводить в том конце отрезка, где произведение $f(a_k)\cdot f''(x)$ или $f(b_k)\cdot f''(x)$ положительно. Поэтому если $f(a_k)\cdot f''(x) > 0$ то левые концы вычисляют методом касательных, а правые – методом хорд, и наоборот.
Итак, при $f(a_k)\cdot f''(x) > 0$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}\cdot f(a_k)$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$$

А при -- $f(a_k)\cdot f''(x)>0$

$$b_{k+1}=b_k-\frac{f(b_k)}{f'(b_k)}$$

$$b_{k+1}=b_k-\frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a_k)}\cdot f(b_k)$$

<u>Пример 3</u> Найти методом хорд и касательных корень уравнения

$$x^3-2x^2+3x-5=0$$

$$plot\left(x^3-2x^2+3x-5, x=-3..3\right);$$

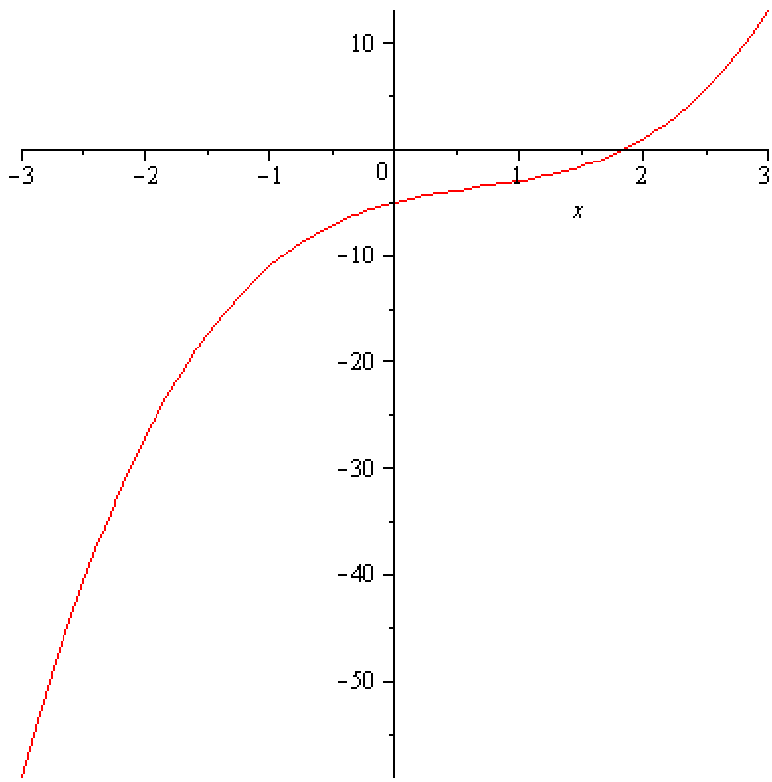


Рис. 14.

При всех $x\in[1;2]$

$$f'(x)>0,\ f''(x)>0$$

$$f(1)=f(a_0)=-3$$
$$f(a_0)\cdot f''(x)=-3\cdot f(x)<0$$
$$f(b_0)=f(2)=1$$
$$a_1=1.75, b_1=1.85$$

$plot([x^3-2x^2+3x-5, 4x-7, 7x-13], x=0..3, y=-5..7);$

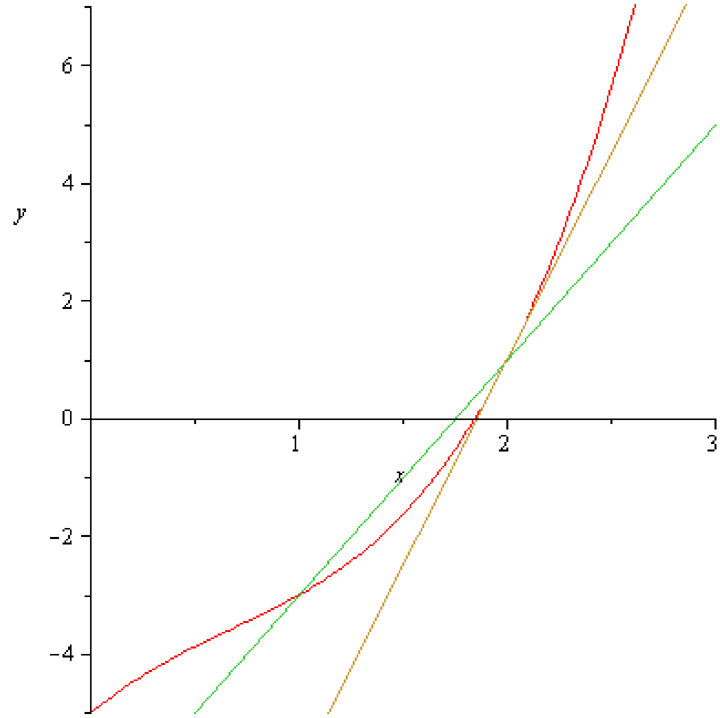


Рис. 14.а

$plot([x^3-2x^2+3x-5, 4x-7, 7x-13], x=0..3, y=-5..7,$
$legend=["граф", "лев", "прав"]);$

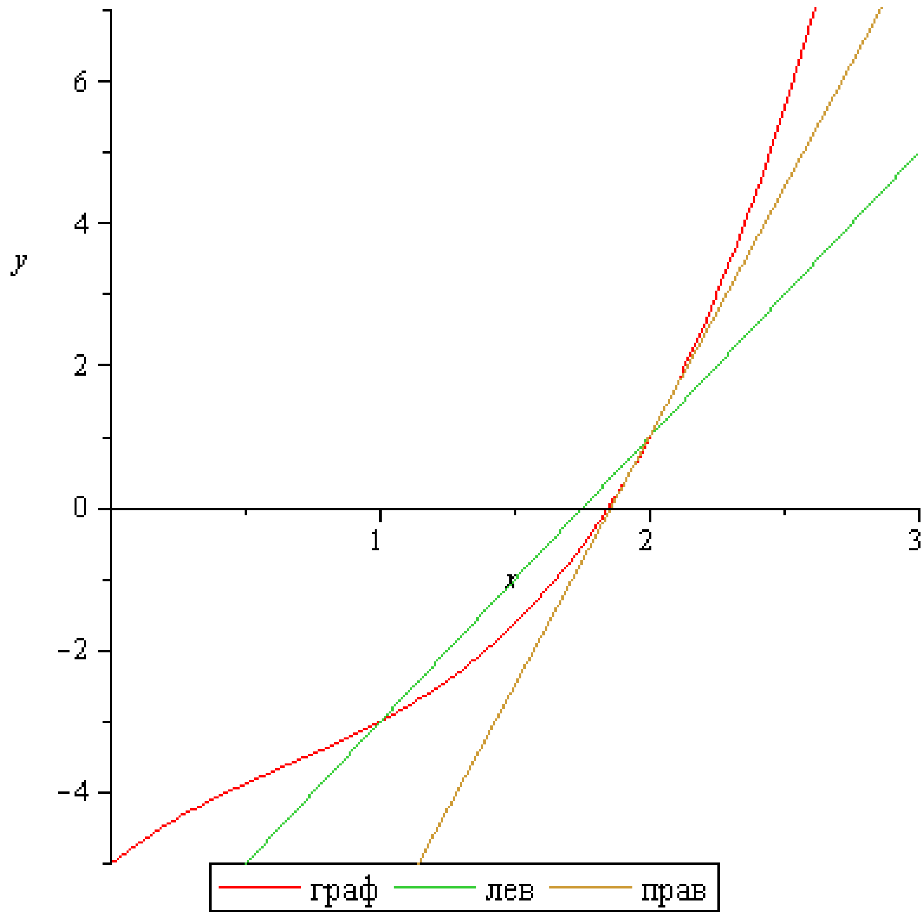


Рис.14б

<u>Задача 9. Методом хорд и касательных найти корень уравнения</u>

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{9 - x^2} = 0$$

$plot([(x+2) - \mathrm{sqrt}(9 - x^2)], x = -4.5\,..+4.5, y = -3\,..4);$

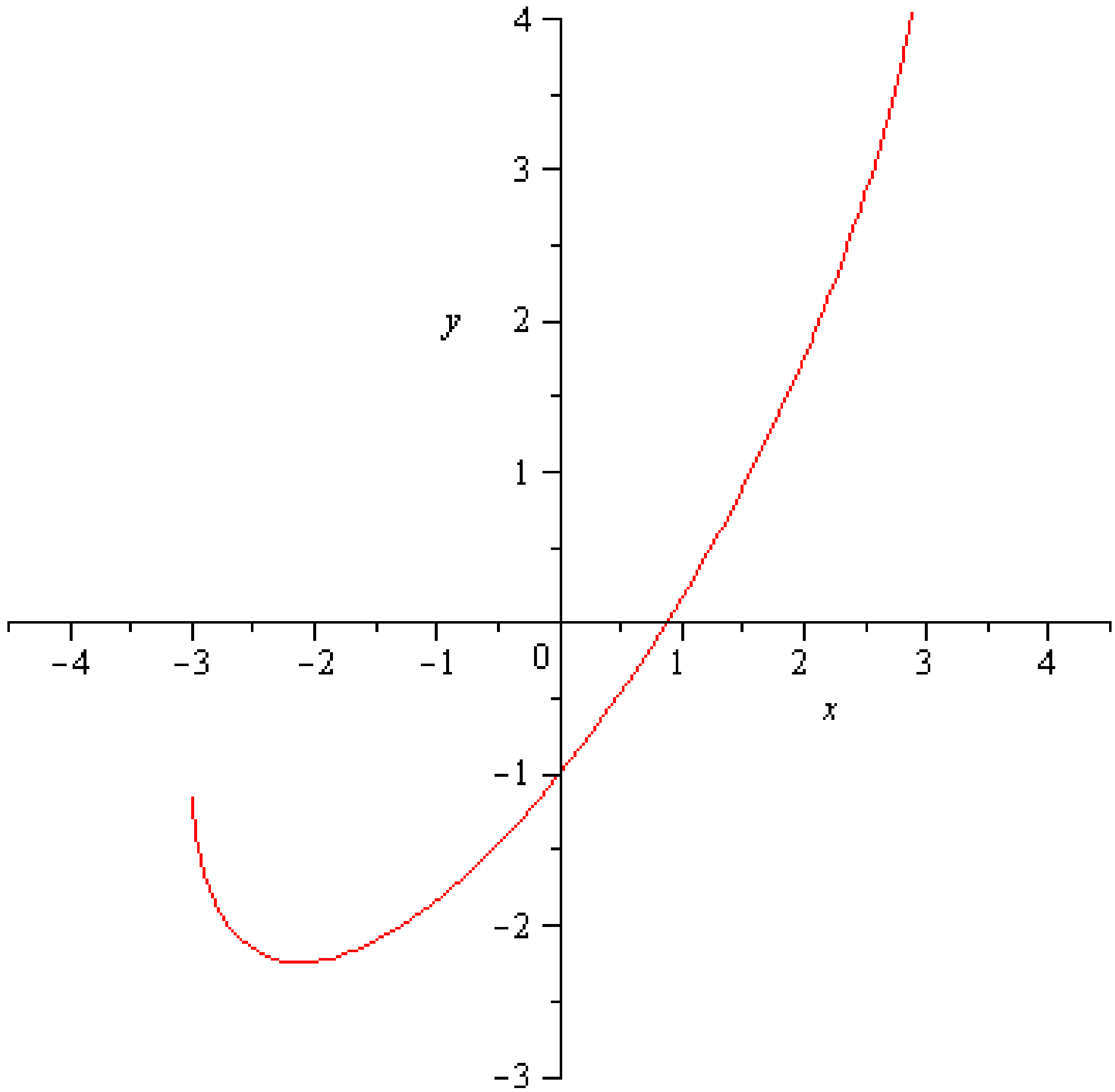


Рис.15 $a_0 = 0; b_0 = 1$

$f(0) = 1;\ f(1) = 3 - \sqrt{8} \approx 0.17$

y=1.17x-- хорда ; y=(1+$\sqrt{8/8}$)x-1.18=1.35x-1.18--- касательная

Перейдем к более подробному изображению:

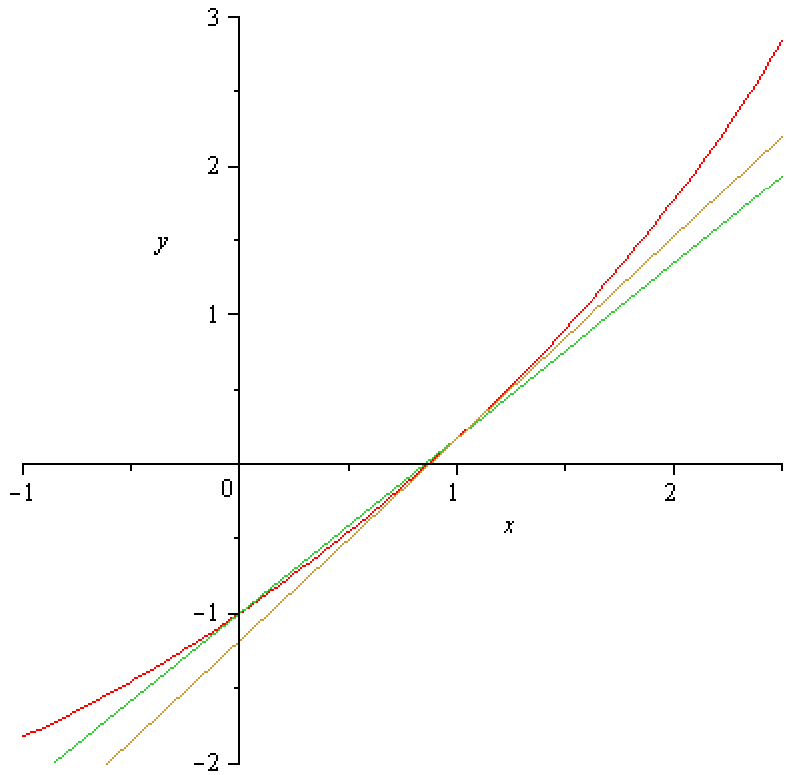


Рис.10

Далее,

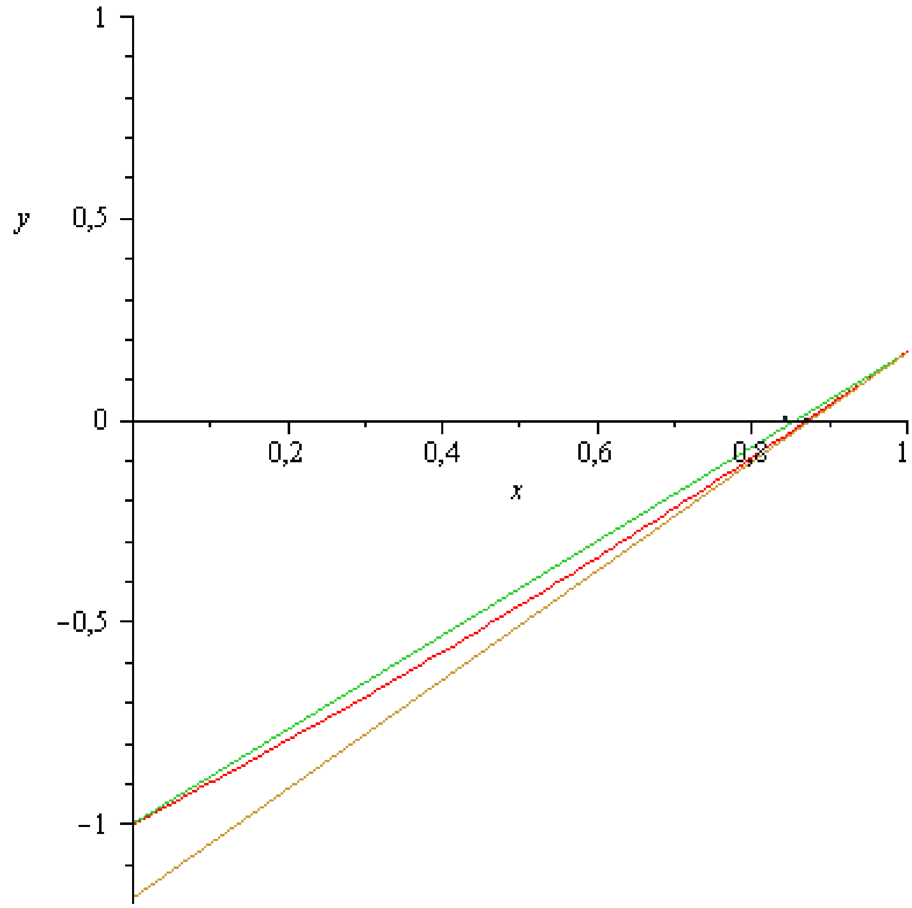


Рис. 11 $a_1 = 0.85; b_1 = 0.87$

Графическое нахождение корней уравнения:
Метод изменения масштаба.

Среди методов решения уравнений графическое решение занимает особое место:

- во-первых, учащиеся могут выполнять все построения в классе без всяких приборов;
- во-вторых, решение наглядно;
- и в третьих, служит повторением графиков функций.

С привлечением компьютеров появляется возможность гарантировать необходимую точность, с которой находится корень(точнее находим интервал в котором лежит корень).

Задача 1 С точностью до 0,001 определить корни уравнения $x^2 - 2\sin(x) = 0$

Нарисуем график $F(x) = x^2 - 2\sin(x)$

$$plot\left(x^2 - 2\sin(x), x = -3..5\right);$$

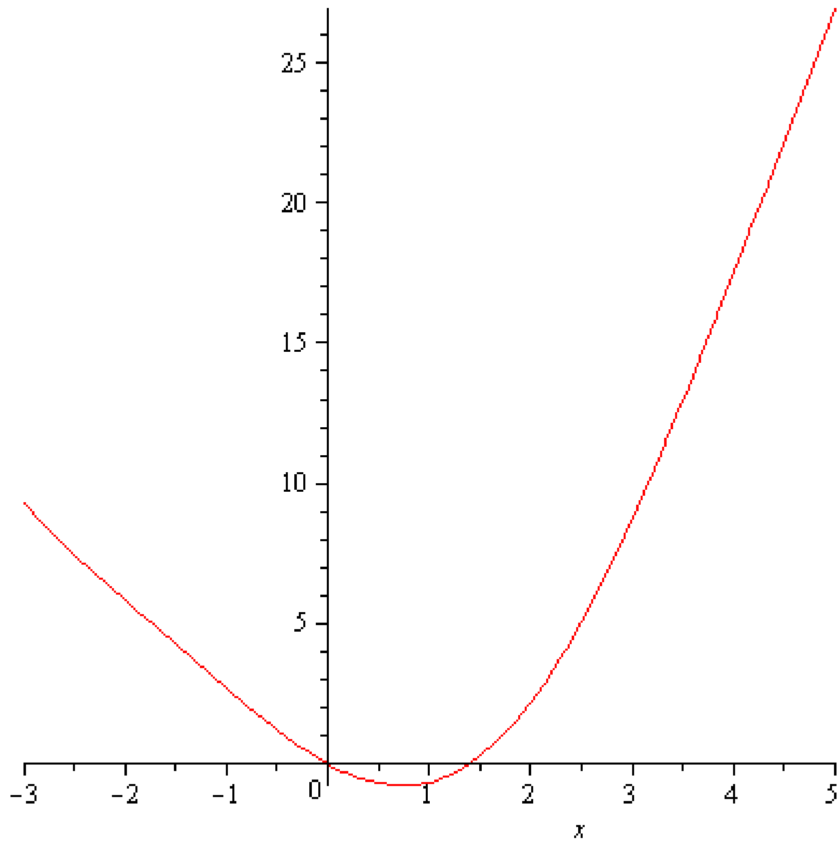


Рис. 1

Напомним, что внутри команды *plot (построить)* стоит функция, чей график будет построен, а через запятую – диапазон независимой переменной

Один из корней $x = 0$ точный и виден сразу.

Другой корень лежит в интервале $x \in [1, 2]$

$$plot\left(x^2 - 2\sin(x), x = 1..2\right);$$

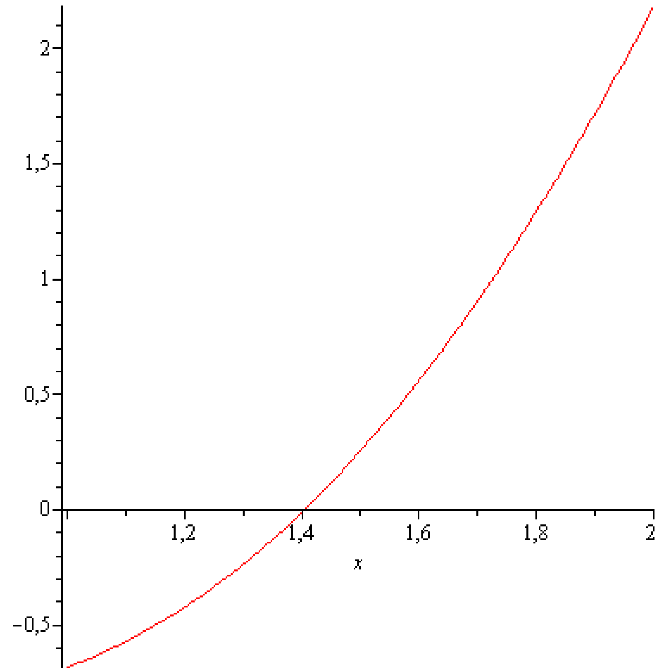


Рис. 2

Ответ $x = 1.4$ “почти “ виден, но это только кажется. Уточним, изменив диапазон графика

$$plot\left(x^2 - 2\sin(x), x = 1.35..1.45\right);$$

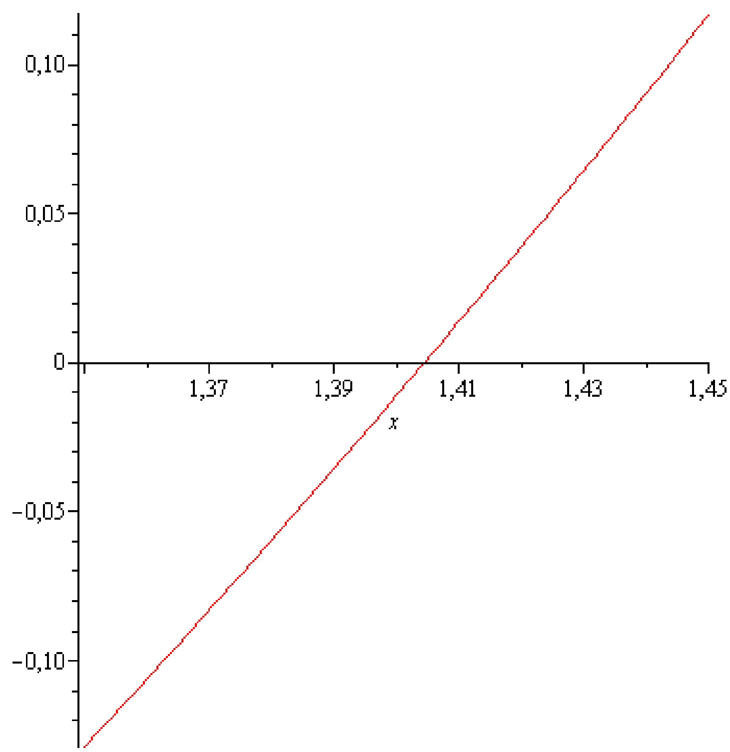


Рис.3.

График становится почти прямой линией, что характерно для непрерывно дифференцируемых функций.

$plot(x^2 - 2\sin(x), x = 1.40..1.41);$

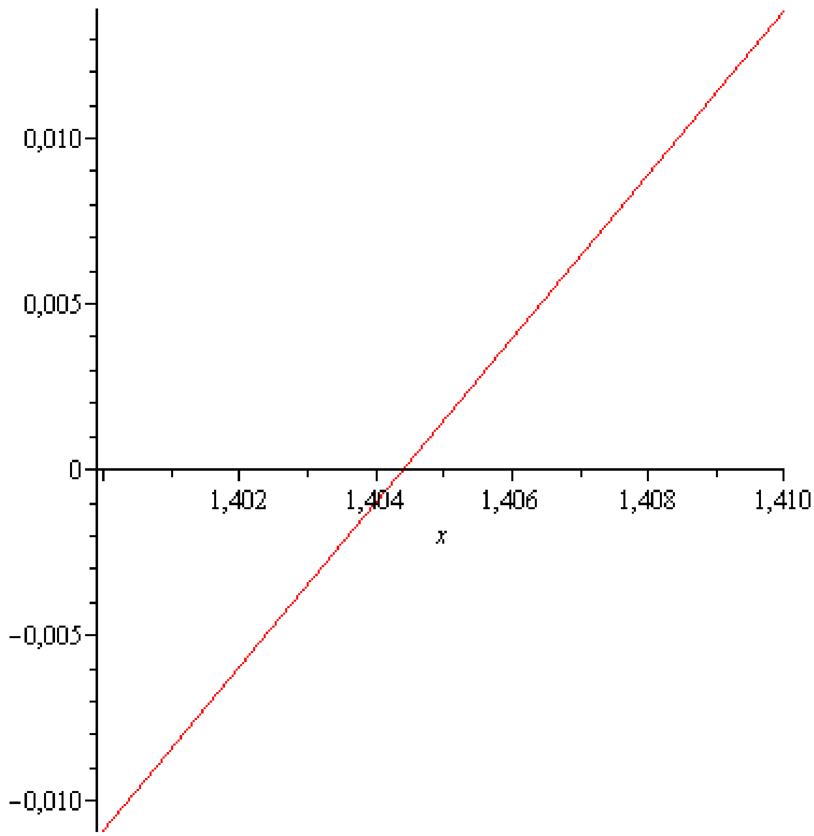


Рис. 4.

Ответ: $x \in [1.404; 1.405]$

<u>Задача 2.</u> Найти положительный корень уравнения

$$x^4 - 2x - 4 = 0$$

С точностью до 0,01.

$> plot(x^4 - 2x - 4, x = -3..5);$

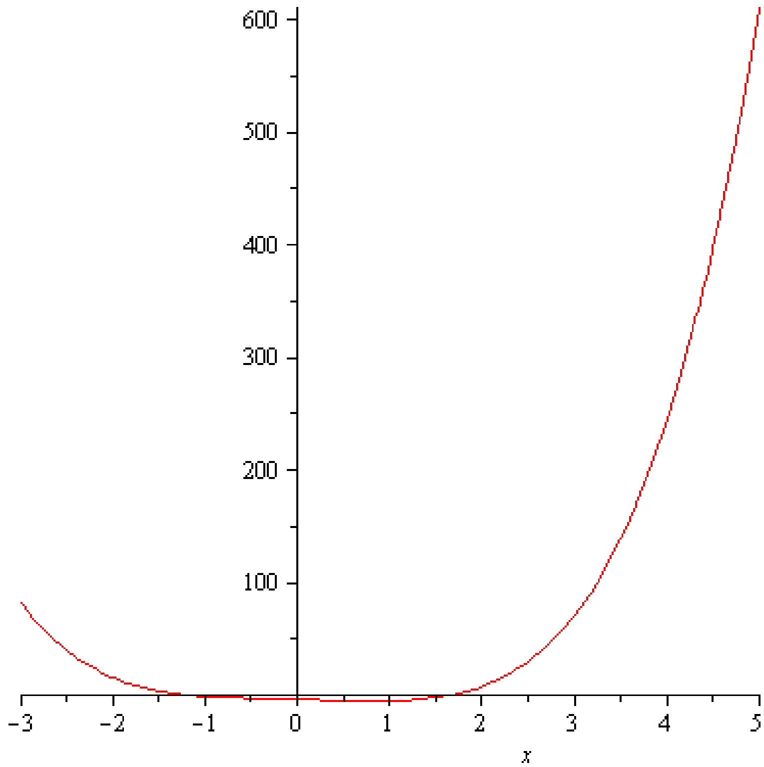


Рис. 5.

Виден интервал, на котором находятся корни. Изменяем диапазон по *x*, заодно указывая и диапазон по зависимой переменной *(y=-5..8).*

> $plot\left(x^4 - 2\,x - 4,\, x = -1.5\,..2,\, y = -5\,..8\right);$

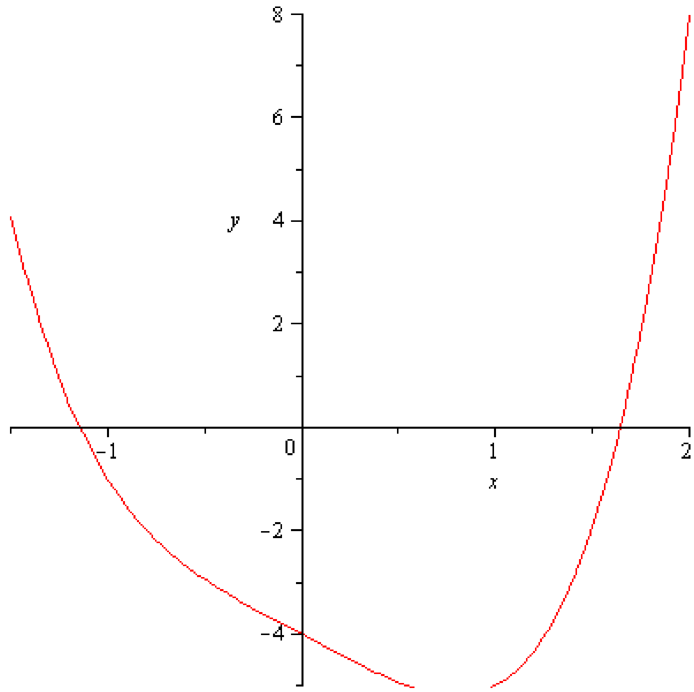


Рис.6

Положительный корень находится между 1.5 и 2. Соответственно меняем диапазон переменных на графике

$> plot(x^4 - 2\,x - 4, x = 1.5\,..2, y = -1\,..2);$

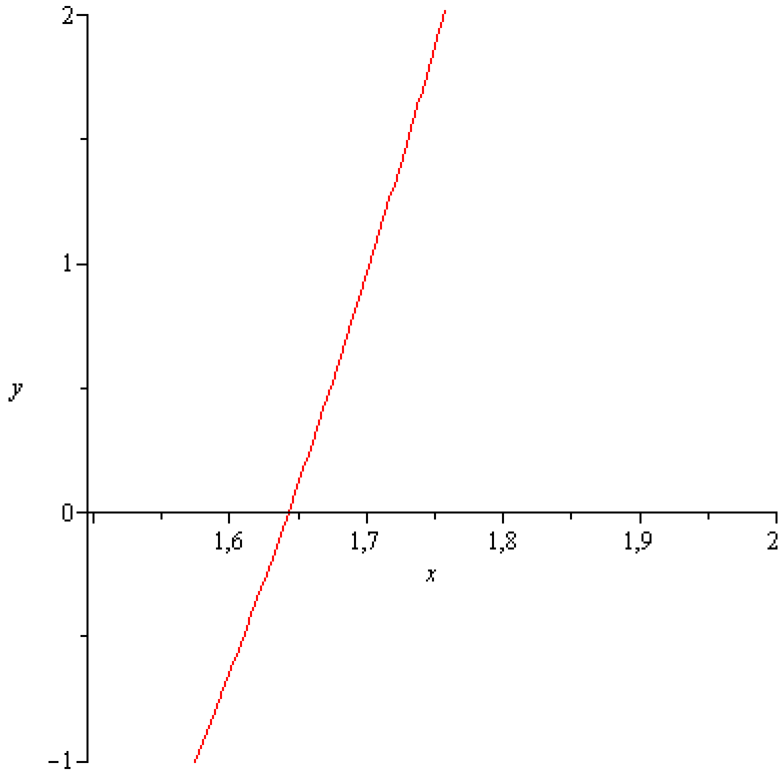
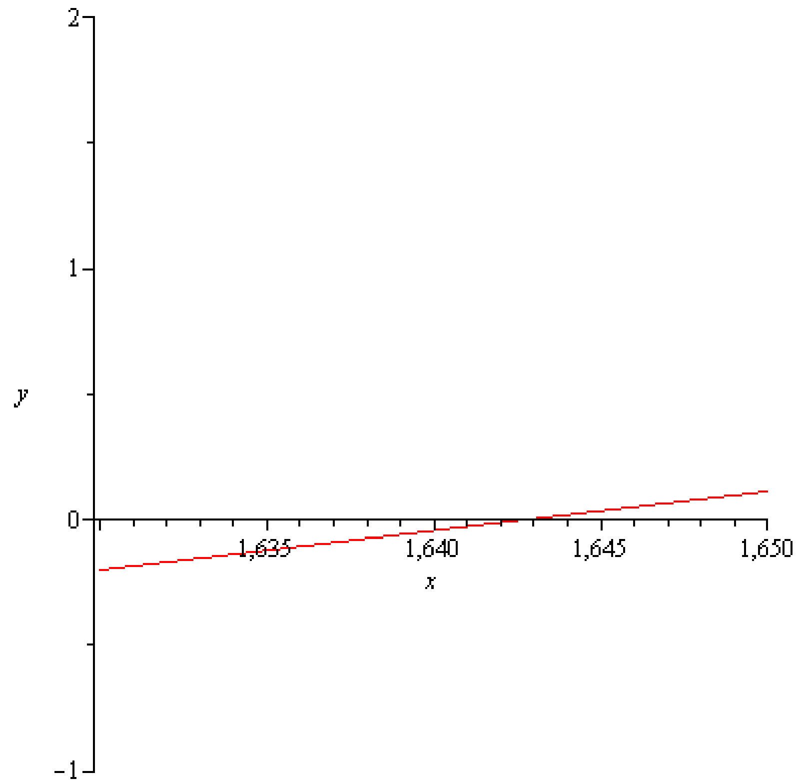


Рис.7

Еще одно уточнение - на следующем графике:



ис. 8

Ответ: $x \in (1.640; 1.645)$

Задача 3. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 = 2x - \frac{3}{x+2} \quad ?$$

Отделите эти корни.

В следующей команде в квадратных скобках перечислены левая и правая части уравнения (на графике они красного и зеленого цвета соответственно)

$$> plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = -3\,..5, y = -5\,..10\right);$$

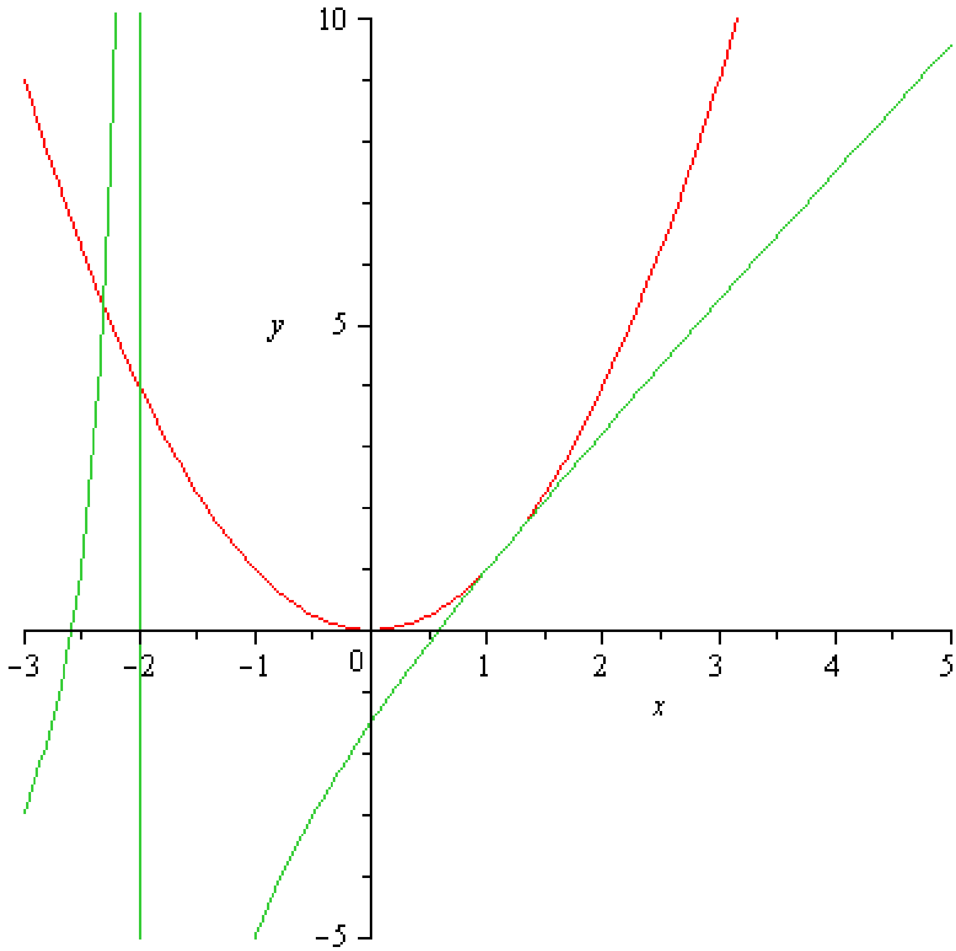


Рис.9

Проводим уточнения при помощи изменения масштаба.

$$> plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1\,..2, y = 0\,..4\right)$$

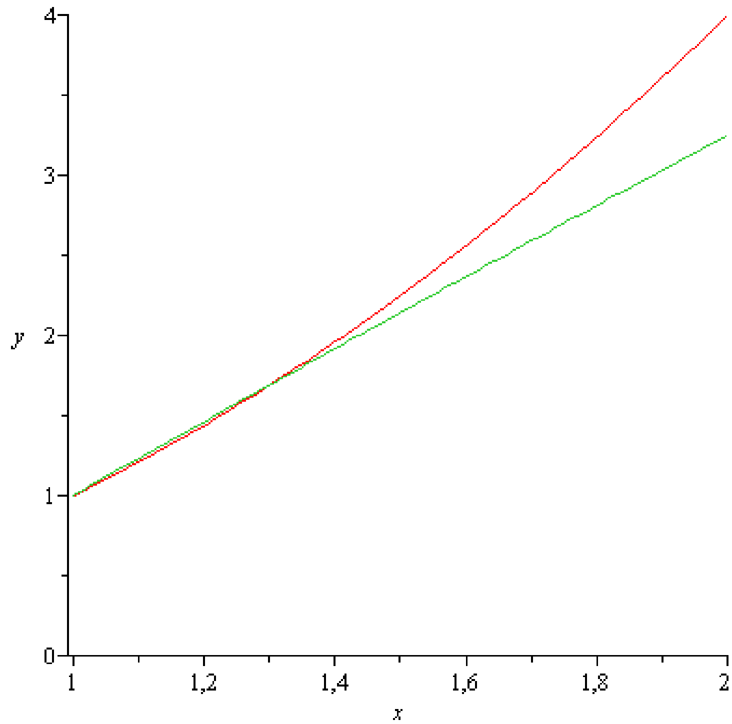


Рис.10

И, далее

$$plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1\,..1.4, y = 0.5\,..2\right);$$

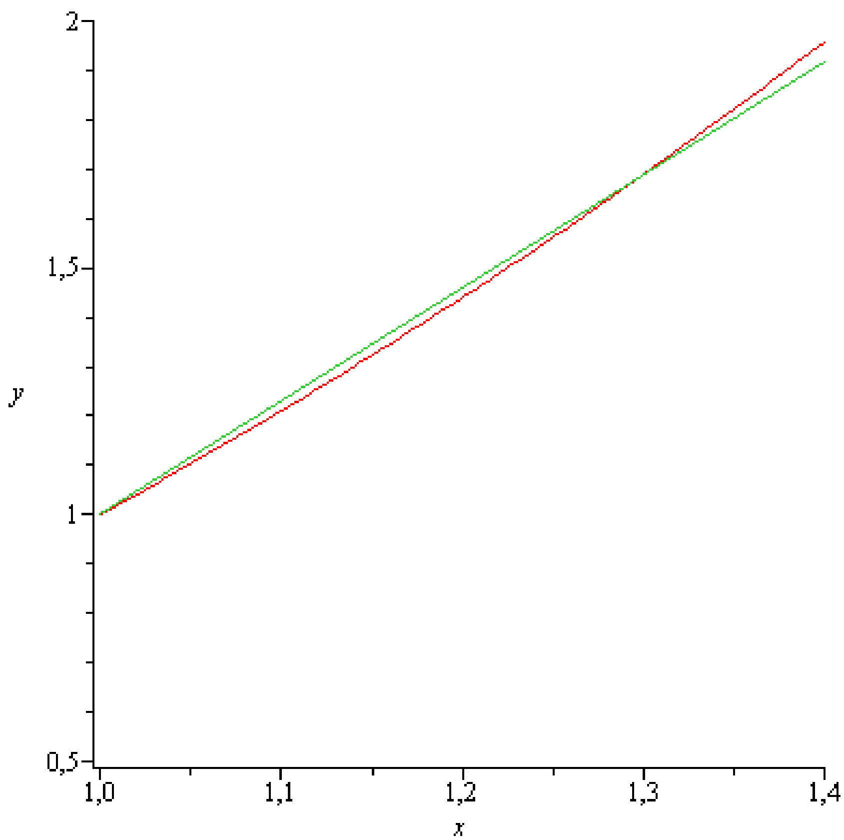


Рис 10

$$plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1\,..1.4, y = 1\,..1.7\right);$$

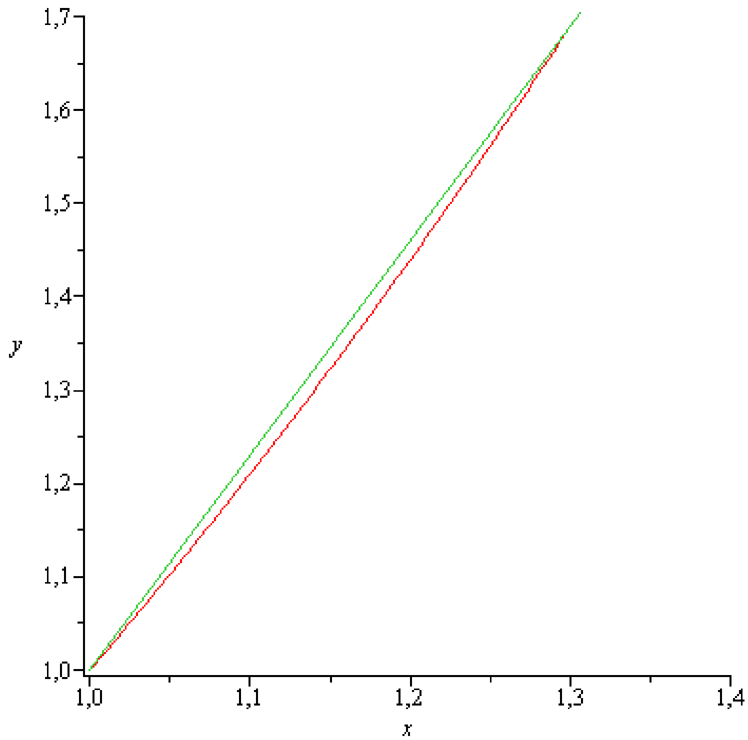


Рис 11

Таким образом, корней два, один из них $x = 0$, он точный; второй корень лежит на интервале $(1.3;1.5)$

Далее

$$plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1.2\,..1.5, y = 1.5\,..2\right);$$

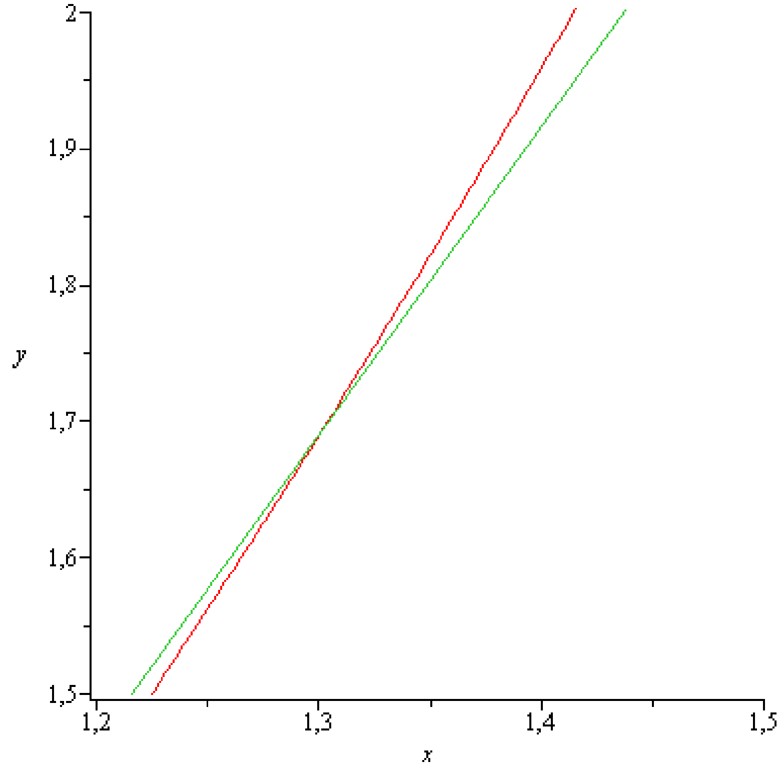


Рис.12

$$plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1.25\,..1.35, y = 1.5\,..2\right);$$

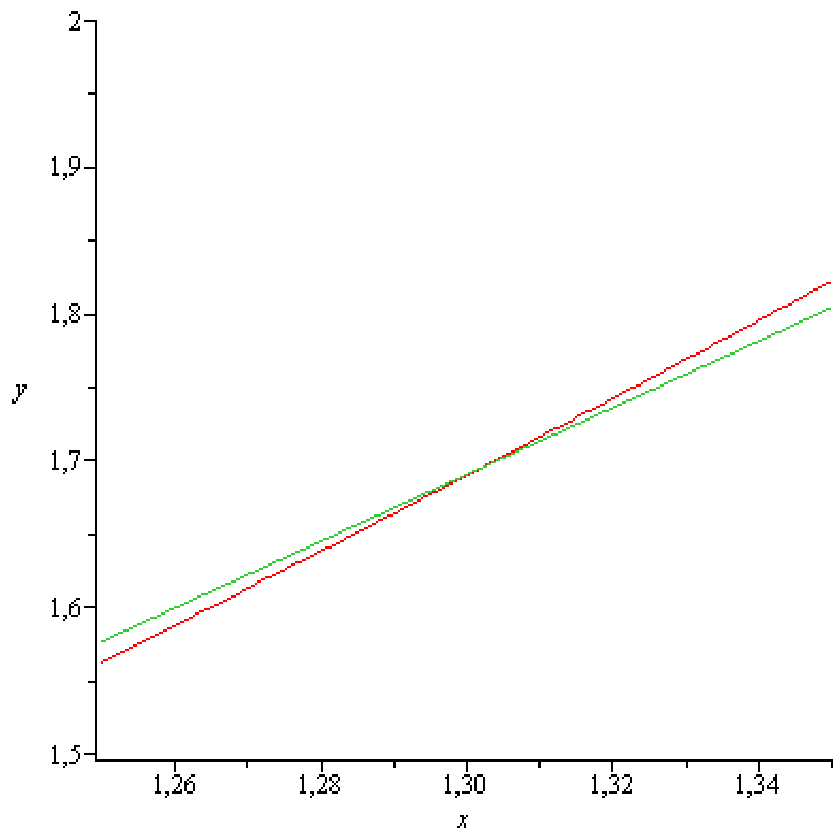


Рис 13

$$plot\left(\left[x^2, 2\,x - \frac{3}{x+2}\right], x = 1.3\,..1.31, y = 1.68\,..1.72\right);$$

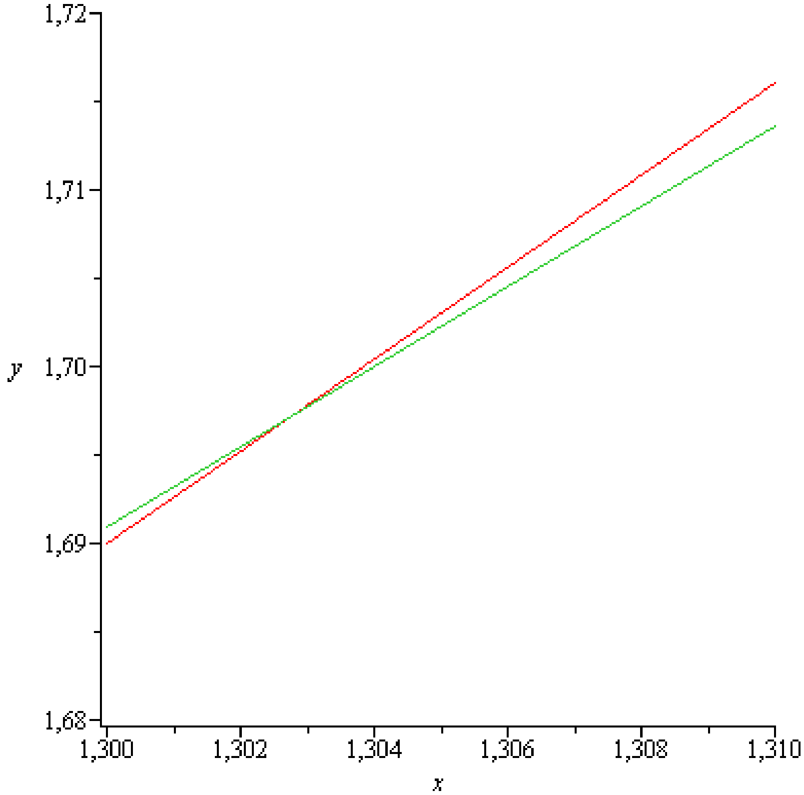


Рис14.

<u>Ответ:</u> второй корень лежит на $x_2 \in (1.302;1304)$

<u>Задача</u> 4. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 - 5x = \frac{x-1}{x+1}$$

Методом изменения масштаба найдите эти корни с точностью до 0.001.

Строим графики левой и право части в одних осях:

$$> plot\left(\left[x^2 - 5\,x,\ \frac{(x-1)}{x+1}\right], x=-3\,..7, y=-8\,..20\right);$$

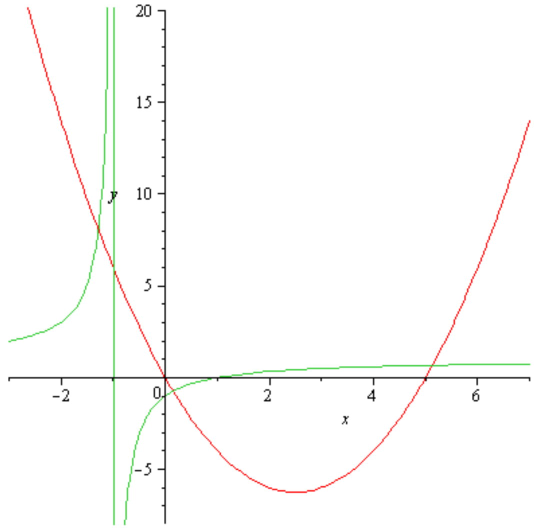


Рис. 15

Более точно левый корень виден на следующем графике:

$$plot\left(\left[x^2 - 5\,x,\ \frac{(x-1)}{x+1}\right], x = -1.5\,..-1.1, y = 5\,..10\right);$$

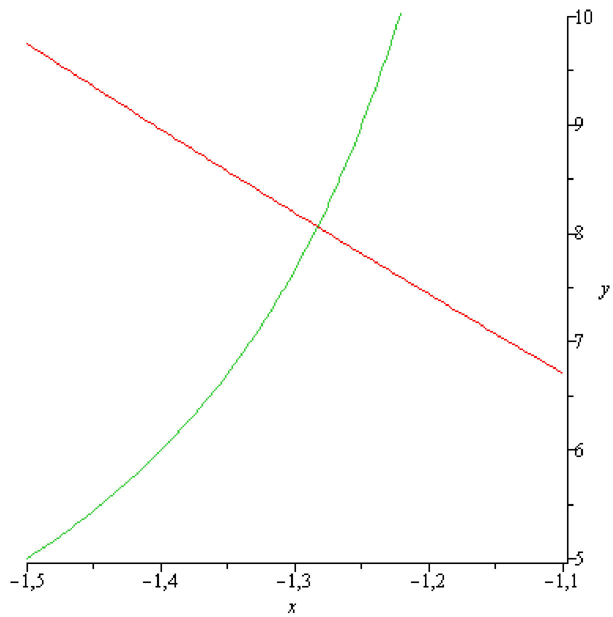


Рис.16

Далее

$$plot\left(\left[x^2 - 5\,x,\ \frac{(x-1)}{x+1}\right], x = -1.3\,..-1.25, y = 7.5\,..8.5\right);$$

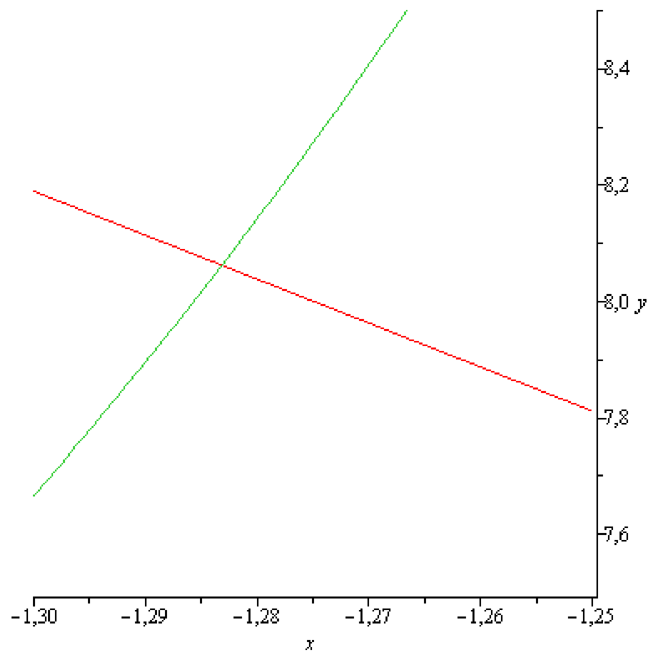


Рис.17

Ответ: $x_1 \approx -1.283$

Перейдем теперь к меньшему правому корню

$$> plot\left(\left[x^2 - 5\,x, \frac{(x-1)}{x+1}\right], x = 0.1\,..0.2, y = -1\,..-0.5\right);$$

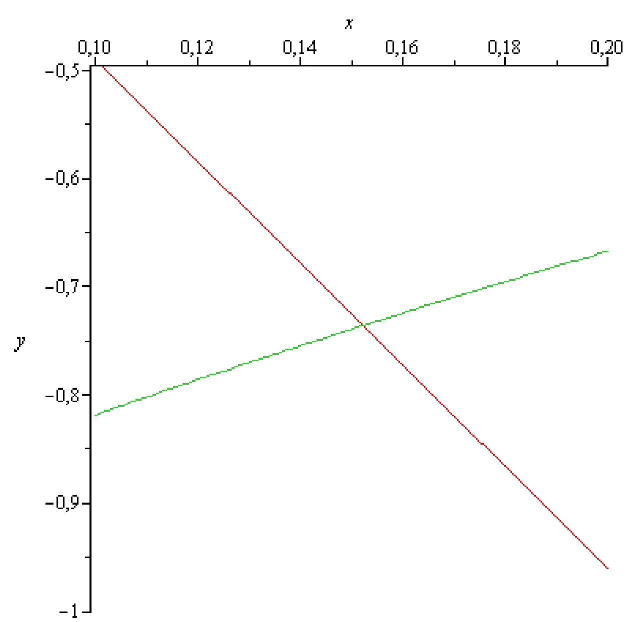


Рис.18

Ответ: $x_2 \approx 0.145$

Наконец, наибольший корень:

$$> plot\left(\left[x^2 - 5\,x,\ \frac{(x-1)}{x+1}\right], x = 5\,..5.2, y = 0.3\,..1.4\right);$$

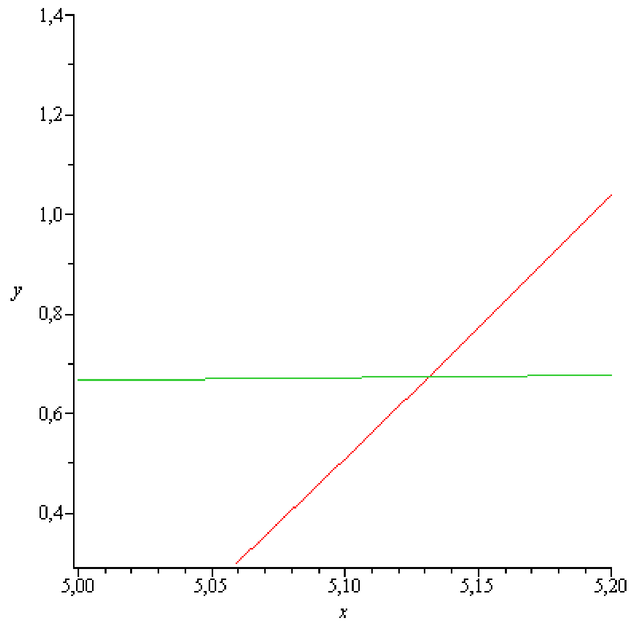


Рис.19

Ответ: $x_3 \approx 5.13$

<u>Задача</u> 5. Сколько корней имеет уравнение

$$\ln(x+1) = x - 5$$

Методом изменения масштаба найдите эти корни с точностью до 0.001.

Строим графики левой и право части в одних осях:

$$> plot(\,[\ln(x+1),\ x - 5\,],\ x = 1\,..10\,);$$

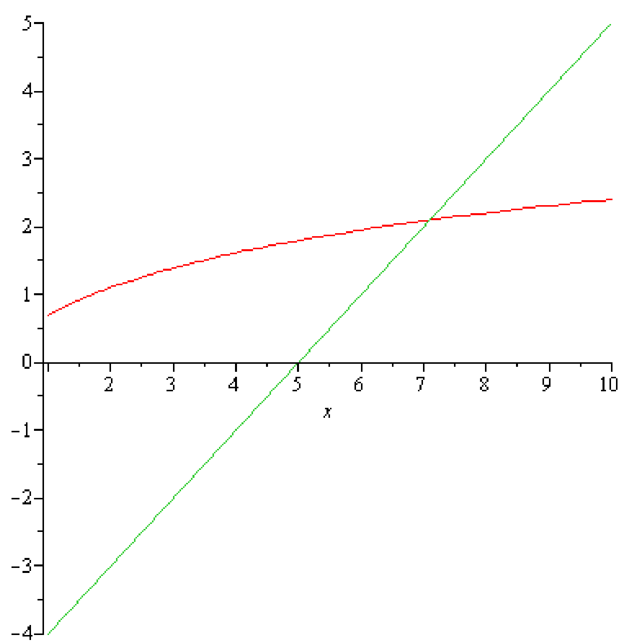


Рис.20

Уточним корень.

Рис 21

И, далее

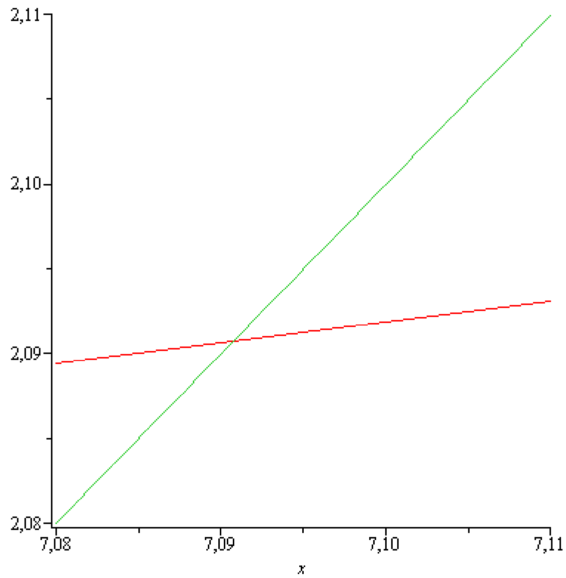


Рис.21

Ответ: 7.091

Задача 6 Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{x+1}{x}\sin(x) = x-5\,?$$

Строим графики левой и право части в одних осях:

$$plot\left(\left[\frac{(x+2)}{x}\sin(x),\ (x-5),\ \right], x=-5\,..8, y=-8\,..3\right);$$

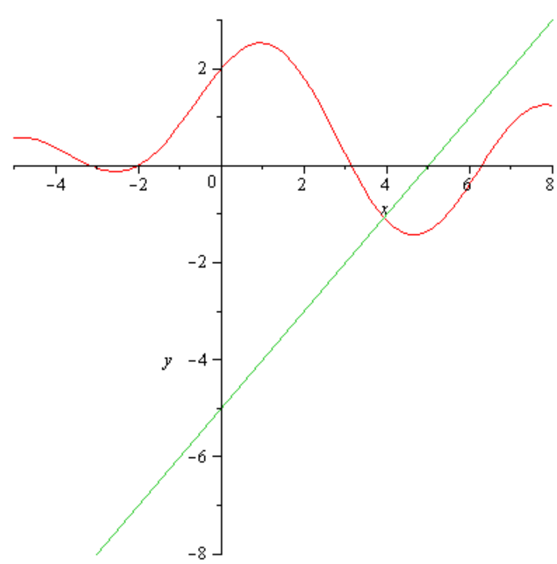


Рис 22.

Уточним корень.

$$plot\left(\left[\frac{(x+2)}{x}\sin(x),\ (x-5),\ \right], x = 2..6, y = -4..3\right);$$

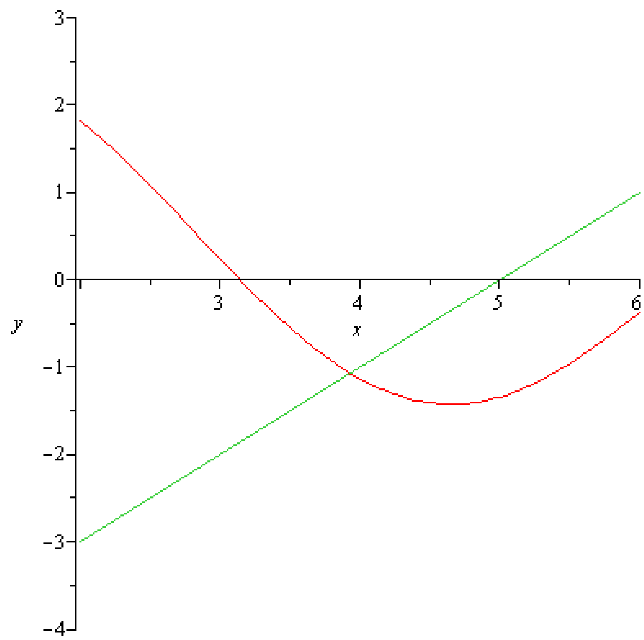


Рис 23

Ответ: один корень, $x \approx 3.9$

Задача 7 Найти количество положительных корней уравнения
$3\sin(x) + x \cdot \cos(x) - x - 2 = 0$
Строим графики левой и право части в одних осях:

$$> plot([3\sin(x) + x \cdot \cos(x), x + 2], x = -30..20);$$

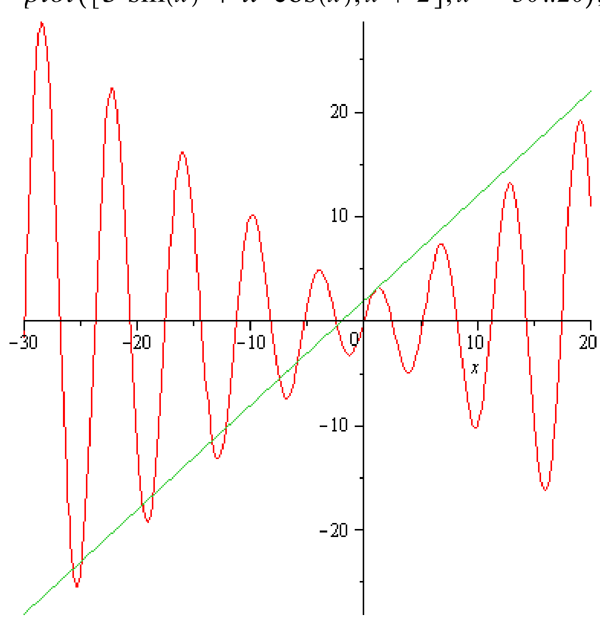


Рис. 24

Отрицательных корней бесконечно много , уточним количество положительных.

> $plot([3\sin(x) + x\cdot\cos(x), x+2], x = 0..2);$

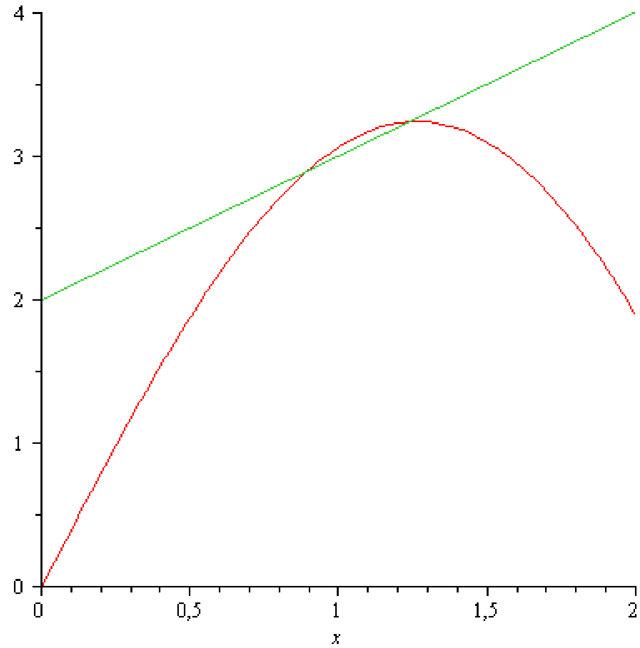


Рис. 25

Ответ: два положительных корня.

<u>Задача</u> 8 Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{2x+7} = x+4\,?$$

plot([$\sqrt{2x+7}, x+4$],x=-4..2)

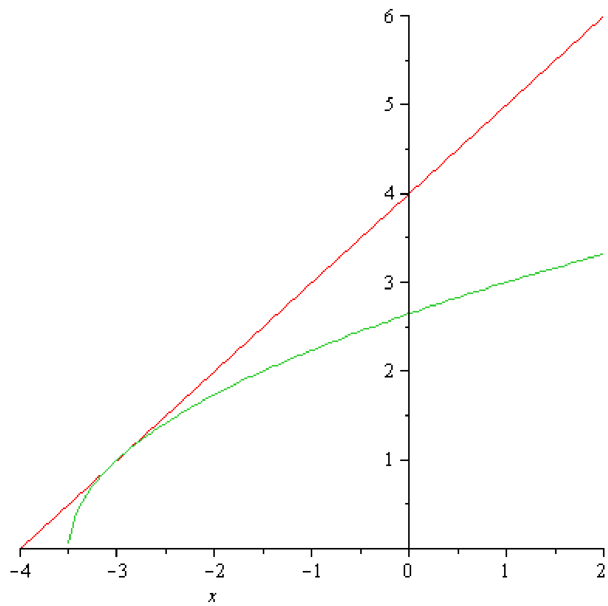
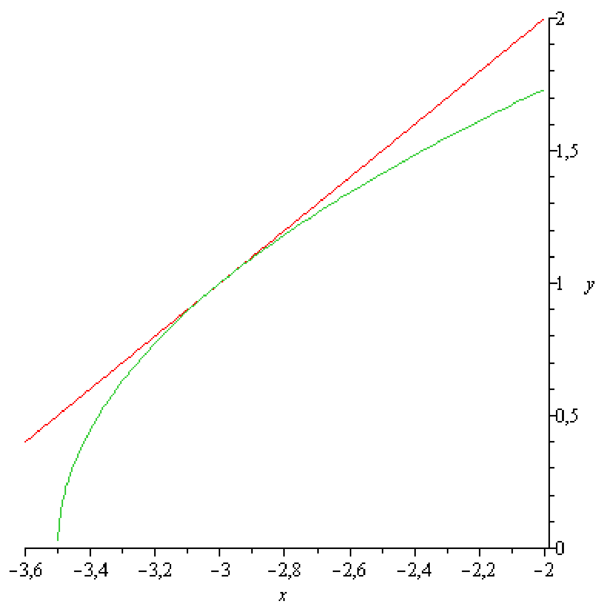


Рис. 26.

Проверим графически , что корень один, меняя масштаб:



.

Рис. 27

Более наглядная картина получается при изображении серии графиков $\sqrt{2x+7} = a(x+4)$ при изменении параметра a от 0 до 2.

Для этого надо использовать команды

p:=plot([$\sqrt{2x+7}$],x=-4..2);

q:= animate(plot, [a(x+4), x = -4 .. 4], a = 0 .. 2);

plots[display](p,q);

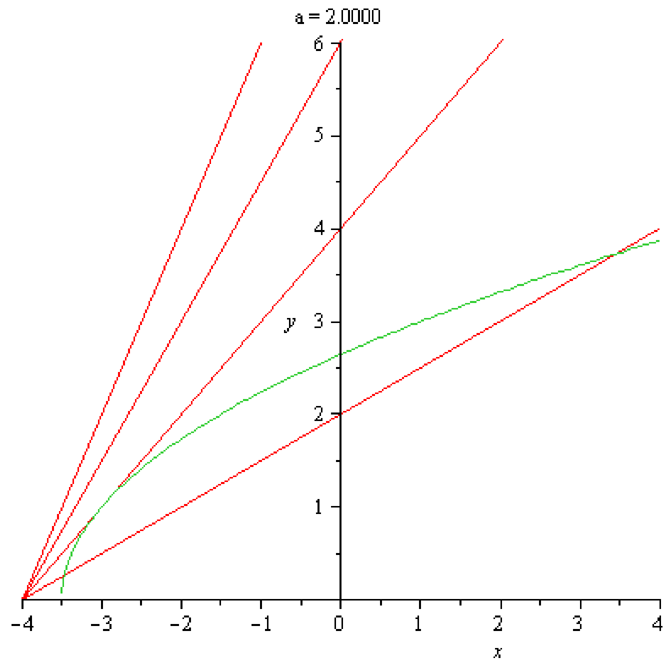


Рис. 28

На рис .28 приведена анимация графика левой части уравнения

$$a\cdot(x+4)=\sqrt{2x+7}$$

При

$$a\in[0;1)-\text{два решения,}$$
$$a=1-\text{одно решение,}$$
$$a\in(1;2]-\text{нет решений.}$$

5.5. Визуализация экстремальных задач с помощью компьютера

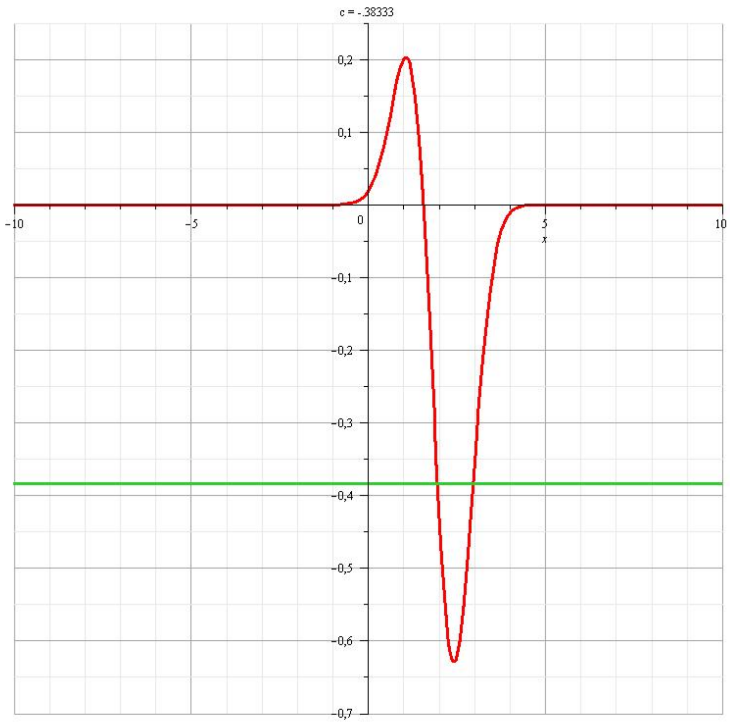
При знакомстве с разделами «Задачи на максимум и минимум» и «Прикладные задачи на экстремум» необходимо обратить внимание учащихся на важность различения близких понятий локального и глобального экстремума, а также экстремума и наибольшего/наименьшего значения.

Вот пример, когда на всей действительной прямой локальные экстремумы являются глобальными и совпадают с наибольшим/наименьшим значениями.

Набираем в командной строке Maple команду

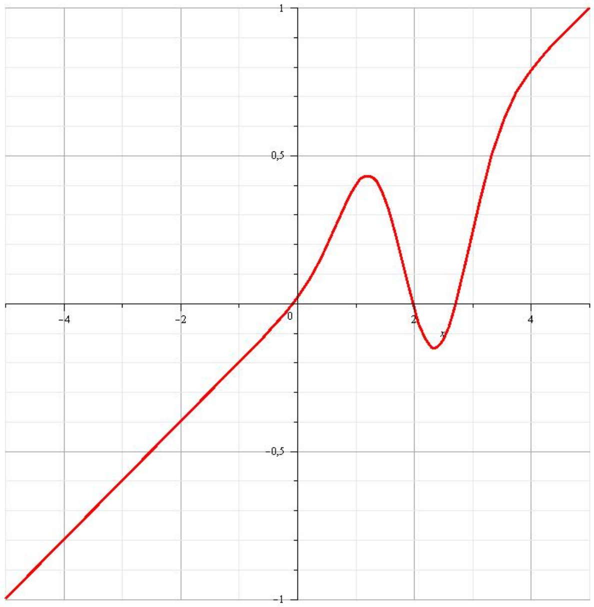
$$with(plots) : animate\left(plot, \left[\left[\cos(x)\cdot \mathrm{e}^{-(x-2)^2},\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathrm{c}\right], \mathrm{gridlines} = \mathrm{true}, \mathrm{thickness} = 3\right], c = -0.7$$
$$\left...0.25\right);$$

Результирующий график анимирован (зеленая линия уровня движется и меняющийся уровень указывается вверху рисунка, см. Fig.1):



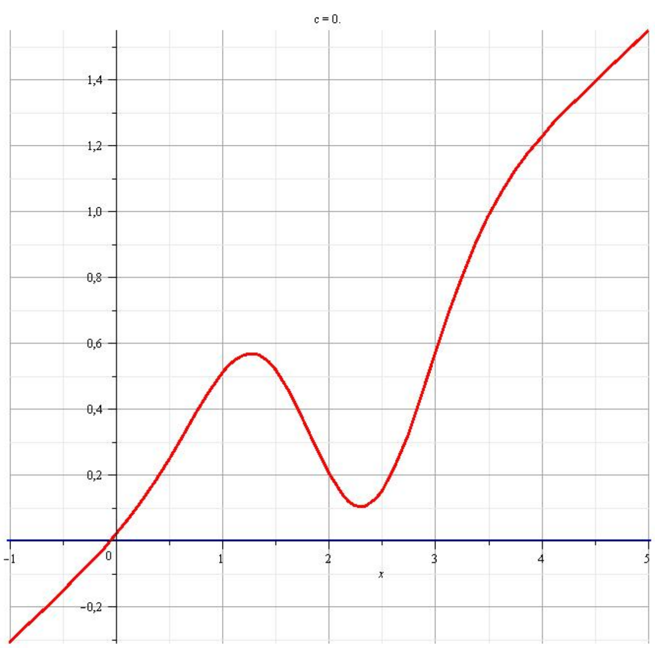
Следующий график иллюстрирует случай, когда локальные минимум и максимум имеются, но наибольшего или наименьшего значения на всей действительной прямой нет.

$$plot\left(0.2\, x + \cos(x)\cdot \mathrm{e}^{-(x-2)^2}, x = -5\, ..5,\right.$$
$$\left. gridlines = true, thickness = 3\right);$$



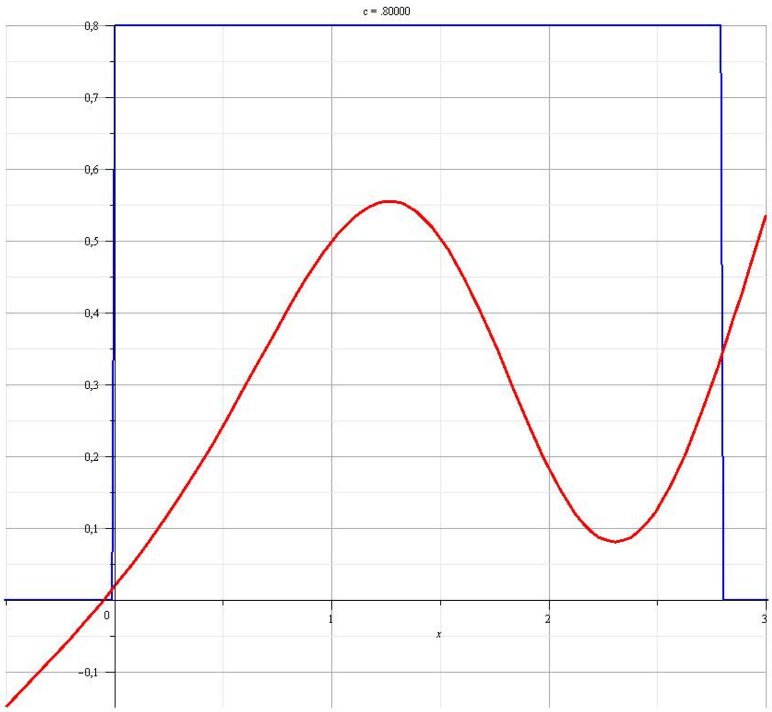
На следующем графике иллюстрируется понятие наибольшего/наименьшего значения функции.

$$with(plots) : Q := plot\left(0.31\, x + \cos(x) \cdot e^{-(x-2)^2}, x = -1\, ..5, gridlines = true, thickness = 3\right) : P := animate(plot, [piecewise(0 < x \textbf{ and } x < 4, c), \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 2], c = 0\, ..1.5); display(P, Q);$$



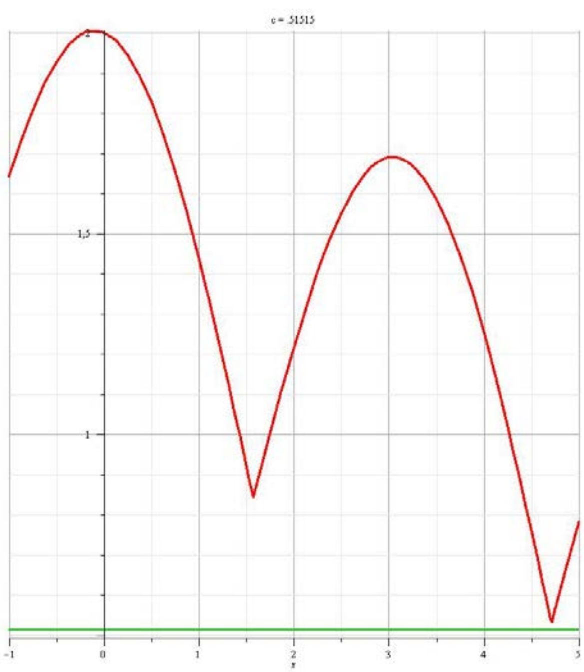
На интервале [0,4] наименьшее и наибольшие значения достигаются на концах интервала.

На еще одном графике наименьшее значение достигается на левом конце, а наибольшее – в точке максимума.



В том случае, когда на графике имеются угловые точки (изломы) в которых производная не определена, максимум и минимум могут находиться в этих точках. Следующий график иллюстрирует это утверждение.

$with(plots) : animate(plot, [[1 - 0.1\,x + |\cos(x)|, c], \mathrm{x} = -1\,..5, \mathrm{gridlines} = \mathrm{true}, \mathrm{thickness} = 3], \mathrm{c} = 0.5\,..2, \mathrm{frames} = 100)$



Наибольшее значение этой функции на отрезке [-1,5] находится в точке максимума, где производная равна 0. Наименьшее значение в (угловой) точке минимума, где производная не определена.

Рассмотрим теперь такую задачу на экстремум.

Нужно выбрать форму прямоугольного участка площадью 4 кв. км таким образом, чтобы периметр его оказался наименьшим.

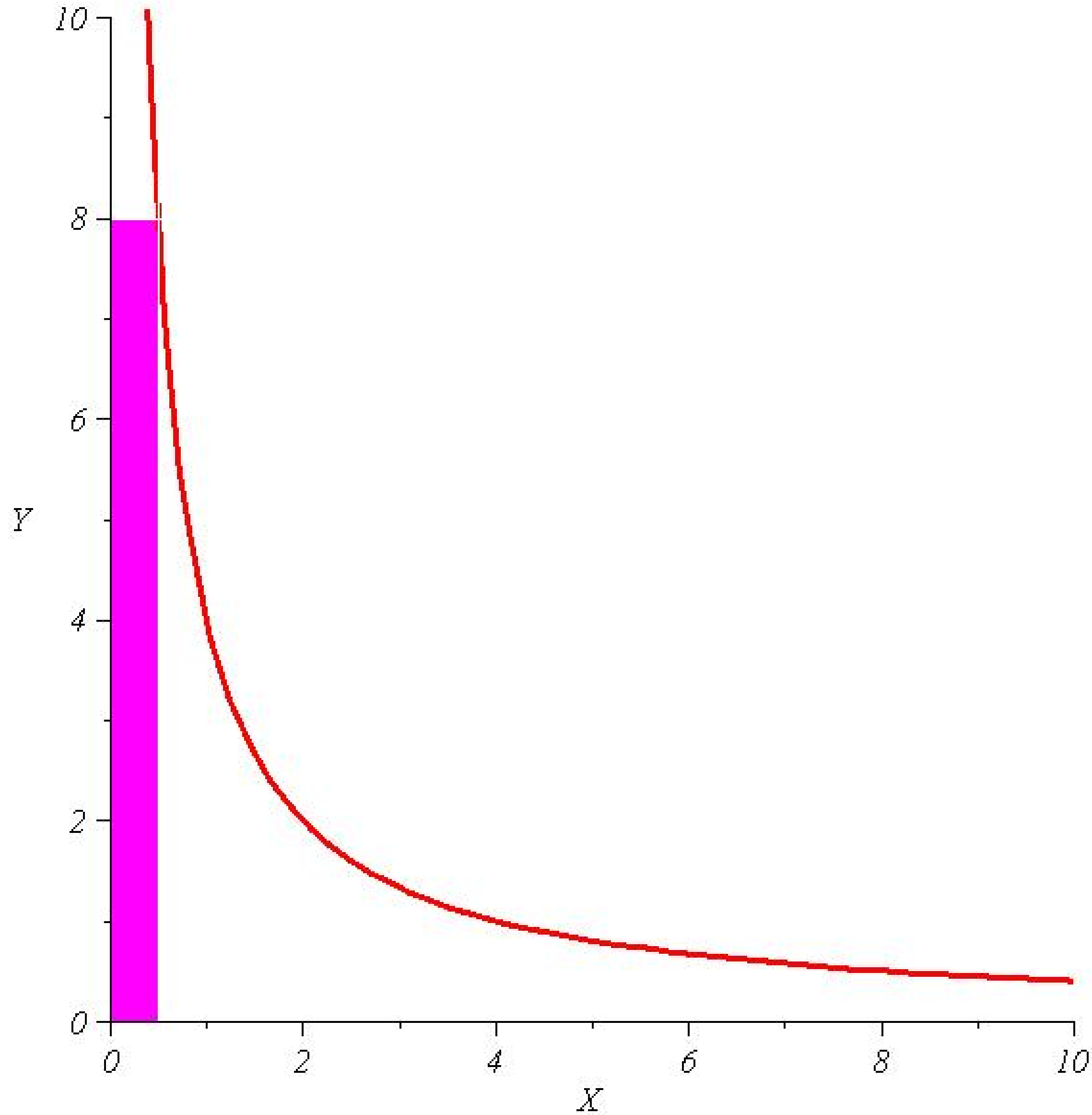
Решение этой задачи несложно. Если x и y –стороны прямоугольника, то по условию $xy = 4$ и $y = 4/x$. Периметр прямоугольника $P = 2x + 2y = 2(x + 4/x)$. Для нахождения экстремума надо приравнять производную нулю:

$$P' = 2(x' + \left(\frac{4}{x}\right)') = 2(1 - \frac{4}{x^2}) = 0$$

Отсюда $x^2 = 4, x = 2$, т.к. $0 < x < \infty$. Отсюда находим y=4/x=2, т.е. искомый прямоугольник – квадрат. Осталось только убедиться, что это именно минимум, ведь производная может быть равна 0 и в точке максимума! Следующие три графика объясняют, почему ответ минимален

$A := plot\left(\frac{4}{x}, x = 0 ..10, 0 ..10\ , thickness = 3,\ labels = [X, Y], font = [TIMES, ITALIC, 14]\right)$

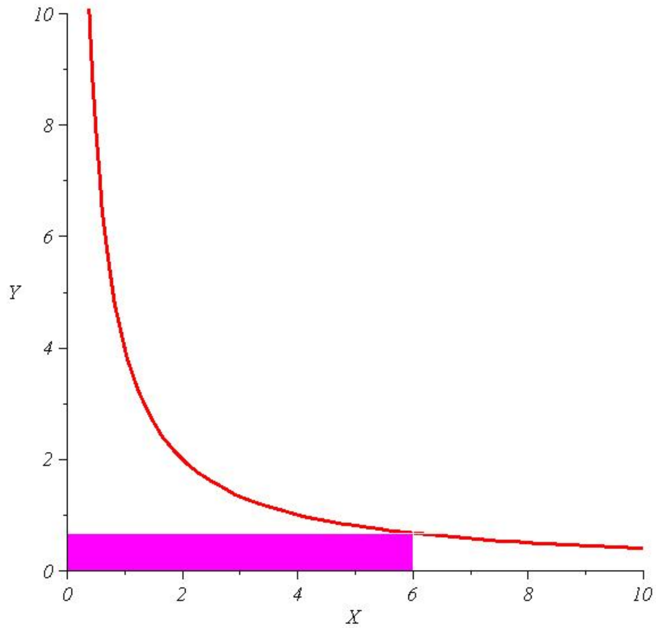
$: B := inequal(\{x \le 0.5, y \le 8, 0 < x, 0 < y\}, x = 0 ..10, y = 0 ..10, optionsfeasible = (color = magenta), optionsexcluded = (color = white), optionsclosed = (color = white)) : display(A, B)$



Правые верхние вершины прямоугольников площади 4 лежат на гиперболе xy=4, y=4/x. При маленьких x y велико (x=0,5, y=8 и P>16 на картинке). Уменьшение ч приведет к дальнейшему увеличению периметра.

$$E := inequal\left(\left\{x \le 6, y \le \frac{4}{6}, 0 < x, 0 < y\right\}, x = 0\,..10, y = 0\,..10, optionsfeasible = (color = magenta), optionsexcluded = (color = white), optionsclosed = (color = white)\right) :$$

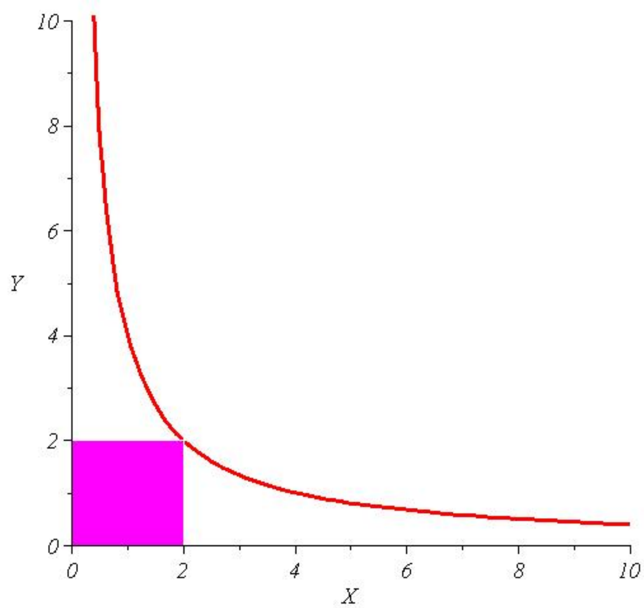
$$display(A, E)$$



Здесь x=6, y=2/3, P>12. Дальнейшее увеличение x приведет к увеличению периметра.

$G := inequal(\{x \le 2, y \le 2, 0 < x, 0 < y\}, x = 0\,..10, y = 0\,..10, optionsfeasible = (color = magenta), optionsexcluded = (color = white), optionsclosed = (color = white)) :$

$display(A, G)$



Оптимальное решение, P=8.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Пакет компьютерной алгебры Maxima

Системы аналитических вычислений привлекают не только своими возможностями реализации алгоритмов построения аналитических решений различных задач, но и развитой графикой, начиная от построения простейших двумерных кривых и заканчивая сложными трехмерными поверхностями и анимацией двумерных и трехмерных изображений. В любой момент пользователь может отобразить результаты своих вычислений в виде графических образов, которые, как известно, более информативны, чем скупые ряды цифр.

В качестве программы, создающей мультимедиа- сопровождения урока по математике с элементами демонстрационного эксперимента выбрана Maxima. Эта программа позволяет решать уравнения, считать (в символьном виде) производные, перемножать скобки с символьными выражениями и раскладывать на множители целые числа и алгебраические выражения. Для наших целей главным является то, что у программы имеются широкие возможности графической визуализации графиков, уравнений и неравенств и их решений

Основными преимуществами программы Maxima являются:

- возможность свободного использования (Maxima относится к классу свободных программ и распространяется на основе лицензии GNU);
- возможность функционирования под управлением различных ОС (в частности Windows);небольшой размер программы (дистрибутив занимает порядка 23 мега-
байт, в установленном виде со всеми расширениями потребуется около 80 мегабайт);
- широкий класс решаемых задач;
- расширение wxMaxima (входящее в комплект поставки) предоставляет пользователю удобный и понятный интерфейс, избавляет от необходимости изучать особенности ввода команд для решения типовых задач;
- интерфейс программы на русском языке;
- наличие справки и инструкций по работе с программой (русскоязычной версии справки нет, но в сети Интернет присутствует большое количество статей с примерами использования Maxima).

Графический интерфейс wxMaxima является наиболее дружественным для начинающих пользователей системы.

Достоинствами wxMaxima являются:

- возможность графического вывода формул;
- упрощенный ввод наиболее часто используемых функций (через

диалоговые окна), а не набор команд, как в классической Maxima;

- разделение окна ввода данных и области вывода результатов (в классической Maxima эти области объединены, и ввод команд происходит в единой рабочей области с полученными результатами).

С тем, чтобы учителя школ имели справочный материал по используемым средствам Maxima, приводятся краткие описания используемых команд и их синтаксис.

При использовании компьютера в мультимедийном сопровождении урока легко заменить функции, уравнения, диапазоны отображения, скорость воспроизведения анимации, цвет линий и множество других параметров. Это позволяет экспериментировать с методами построения графиков в широких пределах. Все это требует творческого подхода со стороны учащегося, изучения содержательных задач, перенося на них акцент с механического построения графика "по точкам". Таким образом, компьютер не снимает необходимость в самостоятельной деятельности, а, напротив, позволяет расширить границы понимания, проводить эксперименты и решать те задачи, которые ранее были недоступны школьникам по чисто техническим соображениям.

Ученики получают на руки распечатанные образцы сеансов в wxMaxima с тем, чтобы выполнить аналогичную работу в соответствии со своим индивидуальным заданием (как вариант, задание может выдаваться на двоих). Обучение интерфейсу программы и простейшим приемам рабо- ты происходит во время выполнения таких заданий.

Демонстрация возможностей программы Maxima

При запуске программы на экране компьютера открывается окно Maxima (см. рис.1).

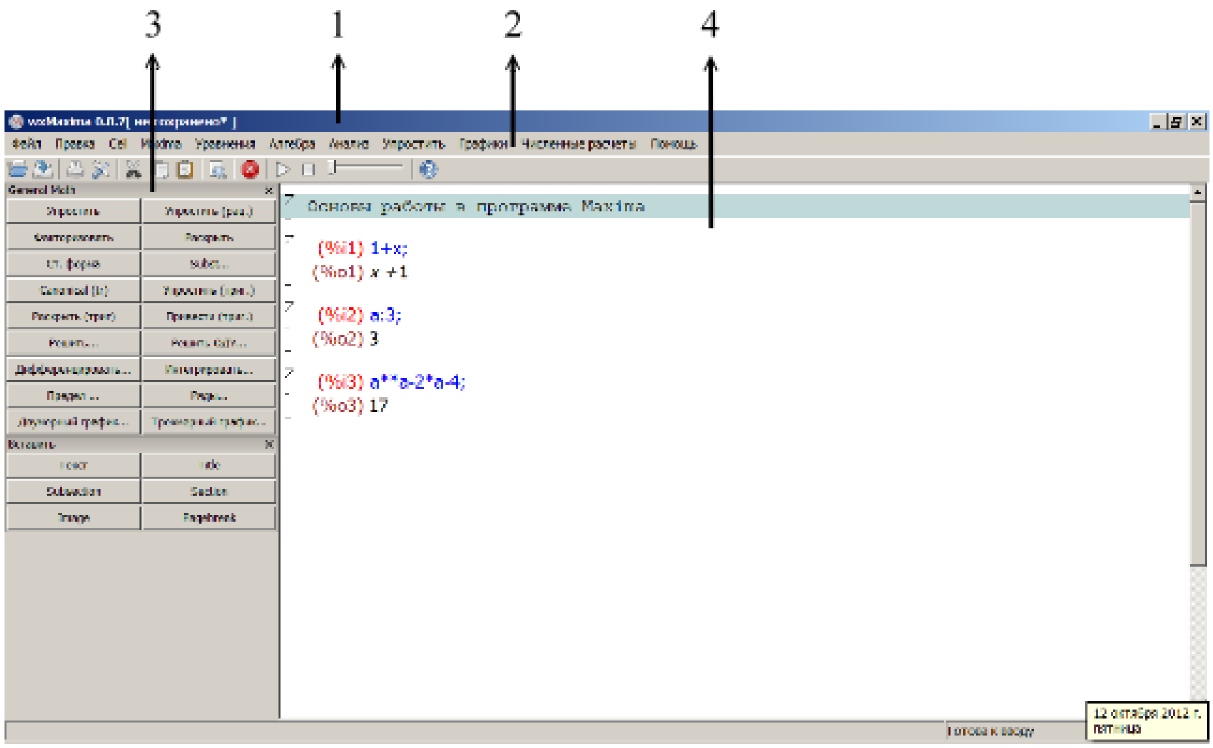


Рис.1. Окно программы wxMaxima В этом окне имеется стандартный набор элементов

- строка заголовка (на рис.1 отмечено цифрой 1);
- строка меню (на рис.1 отмечено цифрой 2);
- рабочая область окна (на рис.1 отмечено цифрой 4) содержит тот рабочий лист – документ, с которым в данный момент происходит работа;
- вертикальная панель инструментов (на рис.1 отмечена цифрой 3) содержит блоки часто используемых функций.

Открыть необходимые панели инструментов можно выбрав пункт меню Maxima, подпункт Panes.

Набор текста, команд начинается без приготовлений, в той части рабочего листа, где эта команда нужна. Выражения в командной строке имеют линейную структуру, которая является удобной поскольку дает едино образную запись всех команд в рабочем листе. Команда – это любое алгебраическое выражение, состоящее из имен переменных и функций, чисел и символьных констант, скобок, функции пользователя, соединенных алгеб раическими операторами.

В процессе набора команды ей присваивается номер (%i1, %i2, ...; вы ставляется перед командой). В конце команды должен стоять символ конца команды точка с запятой или знак $. Если в конце выражения поставить знак ";" (точка с запятой), то при нажатии клавиши Enter выражение будет обработано программой, а результат выведен на дисплей. При этом результат работы команды будет пронумерован (на рис.1 %o1, %o2, ...). Если в конце команды стоит знак "$", то результат не будет выведен на дисплей (и соответственно не будет иметь номера), а только сохранится в памяти компьютера.

В ходе урока учителю рекомендуется особенно отметить, что изменения в выражениях необходимо закреплять нажатием комбинации кнопок Ctrl+Enter. Аналогично нужно поступать со всеми командами, идущими следом за измененной. Нажатие кнопки Enter чаще всего приводит к добавлению новой строки в блок, реже к выполнению команды.

```
(%i1) 1+x;
(%o1) x+1
(%i2) b:3;
(%o2) 3
(%i3) b**22*b4; (%o3) 1
(%i4) f(a):=2*a4;
(%o4) f(a):=2a4
(%i5) f(6);
(%o5) 8
```

Обращаем внимание на тот факт, то возведение в степень можно про изводить двумя способами: с помощью знака $\wedge$ или двух подряд идущих знаков умножения. Таким образом, записи a^5 и $a**5$ являются эквивалентными. Кроме того, присваивание переменной значения производится с помощью двоеточия, определение функций через знак «:=».

В Maxima имеется достаточно большой набор встроенных математических функций. Перечень основных классов встроенных функций приве ден ниже:

- тригонометрические функции: sin (синус), cos (косинус), tan (тангенс), cot (котангенс);
- обратные тригонометрические функции: asin (арксинус), acos (арккосинус), atan (арктангенс), acot (арккотангенс);
- sec (секанс, sec x = 1/cos x), csc (косеканс, csc x = 1/sin x);
- sinh (гиперболический синус), cosh (гиперболический косинус), tanh (гиперболический тангенс), coth (гиперболический котангенс), sech (гиперболический секанс), cosh (гиперболический косеканс);
- log (натуральный логарифм);
- sqrt (квадратный корень);
- mod (остаток от деления);
- abs (модуль);
- min(x1,...,xn) и max(x1,...,xn) нахождение минимального и максимального значения в списке аргументов;
- sign (определяет знак аргумента: pos положительный, neg отрицательный, pnz не определен, zero значение равно нулю);

- Специальные функции функции Бесселя, гаммафункция, гипергеометрическая функция и др.;
- и прочие

Решение уравнений и систем уравнений.

Решение уравнений и их систем осуществляется при помощи функции solve, в качестве параметров в первых квадратных скобках указывается список уравнений через запятую, вовторых список переменных, через запятую (либо несколько упрощённые формы записи):

solve(expr, x)

solve(expr)

solve([eqn_1, ..., eqn_n], [x_1, ..., x_n])

Например, для решения одного уравнения с одним неизвестным можно вы полнить команду

(%i6) solve(x**22*x4);

(%o6) $[x = 1 - \sqrt{5}, x = \sqrt{5}+1]$

Решение системы уравнений в символьном виде производится так:

(%i7)   solve([x*y/(x+y)=a,x*z/(x+z)=b,y*z/(y+z)=c], [x,y,z]);

(%o7) $[[x = 0, y = 0, z = 0], [x = \frac{2abc}{(b+a)c-ab}, y = \frac{2abc}{(b-a)c+ab}, z = -\frac{2abc}{(b-a)c-ab}]]$

Из приведенного примера видно, что если система имеет не одно решение, то каждое решение выдается в виде отдельной группы и оформляется в отдельные квадратные скобки.

Построение графиков функций

Рассмотрим применение программы Maxima к графическому решению уравнений и неравенств.

Для вывода графиков на экран или на печать при помощи Maxima существуют несколько вариантов форматов и, соответственно, программ вывода графики, а именно:

- openmath (Tcl/Tk программа с графическим интерфейсом пользователя; элемент xMaxima)
- gnuplot (мощная утилита для построения графиков, обмен с Maxima через канал)
- mgnuplot (Tkинтерфейс к gnuplot с рудиментарным графическим ин тегфейсом пользователя; включён в дистрибутив Maxima)
- wxMaxima (встроенные возможности frontenda к Maxima)

Все варианты интерфейса (кроме wxMaxima) для построения графи ков используют две базовых функции: plot2d (построение двумерных гра фиков) и plot3d (построение трхмерных графиков). При использовании wxMaxima кроме них испольуются ещё две аналогичные команды: wxplot2d и wxplot3d.

Все команды позволяют либо вывести график на экран, либо (в зависимости от параметров функции) в файл.

Построение графика явно заданной функции y=f(x).

График функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно построить с помощью функции

plot2d(f(x),[x,a,b],опции)

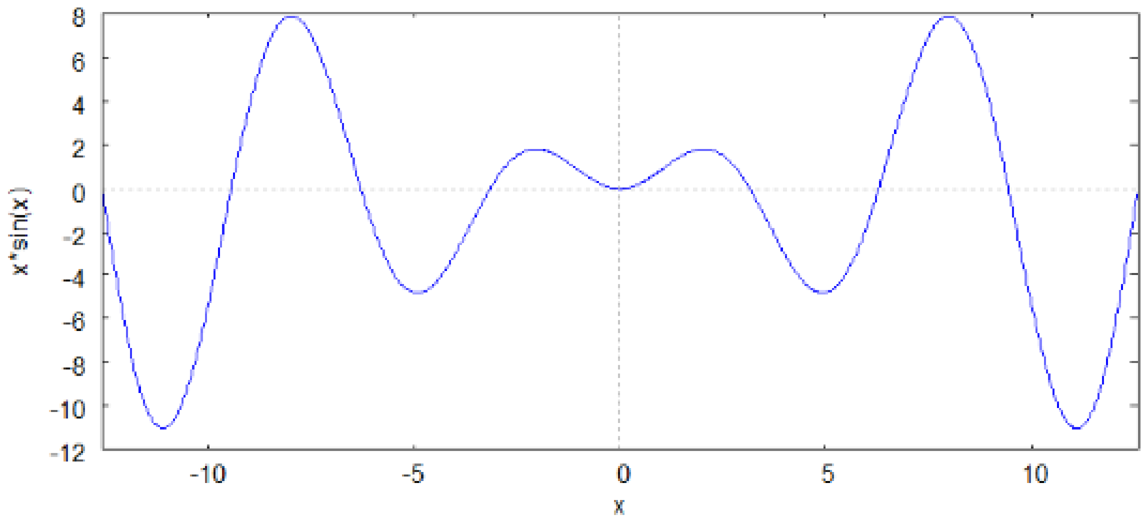
или

plot2d(f(x),[x,a,b],[y,c,d],опции).

Опции не обязательны, однако, для изменения свойств графика их нуж но задавать. Параметр [y,c,d] можно не задавать, тогда высота графика выбирается по умолчанию.

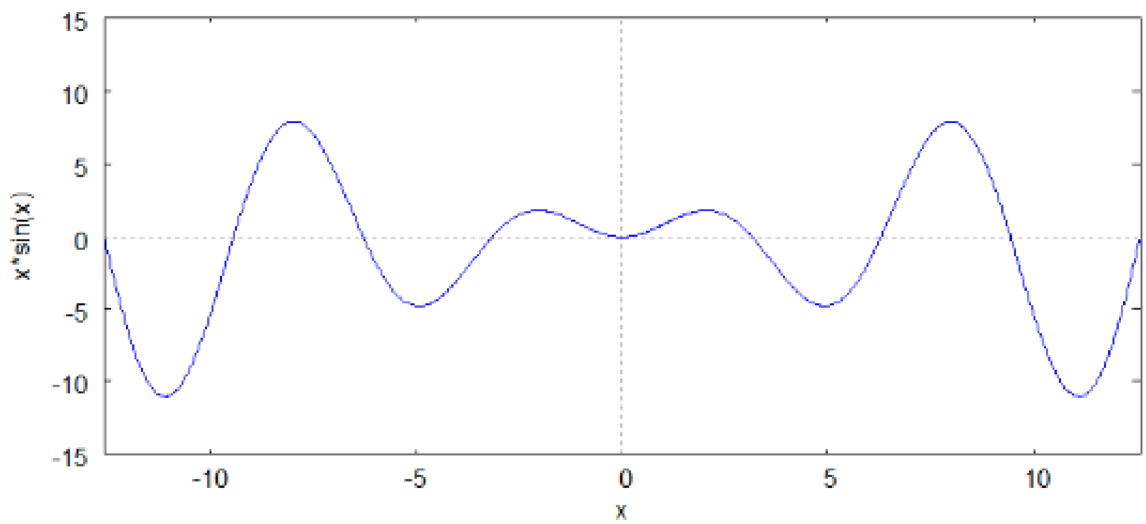
Построим график функции $y = x \sin x$ на отрезке $[-4\pi, 4\pi]$ для слу чев, когда диапазон изменения функции выбирается автоматически

(%i8) plot2d(x*sin(x), [x, 4*%pi, 4*%pi])$



и когда диапазон изменения функции, задается вручную

(%i9) plot2d(x*sin(x), [x, 4*%pi, 4*%pi],[y,15,15])$



Рассмотрим некоторые опции необходимые для построения графиков. Опции указываются в виде аргументов в квадратных скобках. Воз можна установка следующих основных параметров графика:

· **Легенда**. Настройка легенды производится опцией

[legend, "Text 1" , "Text 2"].

Обычно количество текстовых пояснений соответствует количеству графиков. Если легенда не нужна, то выставляем опцию [legend,false].

- **Названия осей** *OX* **и** *OY* выставляются опциями

[xlabel,"Text x"] и [ylabel,"Text y"]

соответственно.
- **Цвет и стиль** линии графика оформляется опцией

[style, style1, style2].

  – Стиль каждой отдельной линии задается следующим образом

[lines,N,M],

здесь N – цвет линии в числовом формате (см. таблица 1), M – толщина линии.
  – Стиль точки задается опцией

[points, N, M, K].

Здесь M размер точек, N – цвет точки, K – стиль прорисовки точек (см. таблица 2).
  – Стиль «точки, соединенные линией» оформляется опцией

[linespoints,N,M],

здесь M – толщина линии, N – стиль прорисовки точек.

- **Линии сетки** задаются опцией

[grid, N, M],

здесь N и M – количество линий по оси OX и OY соответственно.

- Опция ntics=N указывает число точек N , по которым проводится кривая.
- Можно выводить график функции в определенном формате с помощью опции

[gnuplot_term, V],

здесь V формат вывода графика. Он может принимать значения ps, "png size 1000,1000", ... (ps – тип, png тип размера 1000 на 1000 точек). При этом График можно сохранять в файл с именем Name.eps с помощью опции

[gnuplot_out_file, "Name.eps"].

Таблица 1. Цвет в Maxima.

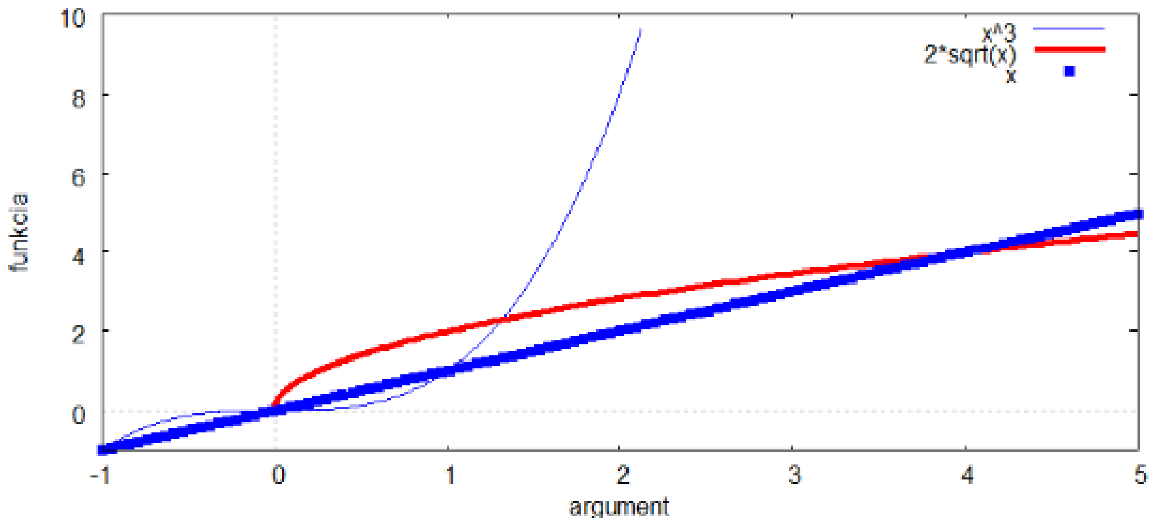
Числовой формат цвета	Название цвета
1	синий,
2	красный,
3	розовый,
4	оранжевый,
5	коричневый,
6	зеленый,
7	голубой

Таблица 2. Стили прорисовки точек в Maxima.

Числовой формат	Стиль прорисовки точек
1	сплошные кружочки,
2	пустые кружочки,
3	знак плюс,
4	знак крестик,
5	знак *,
6	сплошные квадратики,
7	пустые квадратики,
8	сплошные треугольники,
9	пустые треугольники,
10	сплошные перевернутые треугольники,
11	пустые перевернутые треугольники,
12	сплошные ромбы,
13	пустые ромбы.

(%i10) plot2d([$x \wedge 3$, 2 $* sqrt(x)$, x], [x,1,5], [y,1,10],
[style, [lines,1,1],[lines, 4,2],[points, 1, 1, 6]], [legend,
"$x \wedge 3$ "2 $* sqrt(x)$ "x"], [xlabel,"argument"], [ylabel,"funkcia"])$ plot2d: some values were clipped.
plot2d: expression evaluates to nonnumeric value somewhere in plotting range.

В данном примере Maxima выводит на экран кроме графика предупреждение о том, что некоторые функции можно построить не на всем указанном диапазоне изменения переменной (в данном случае 1 не существует).



Кроме того, интересным способ вывода графика. Представленная выше функция plot2d выводит график в отдельное окно, аналогичная функция wxplot2d выводит график в то же рабочее окно.

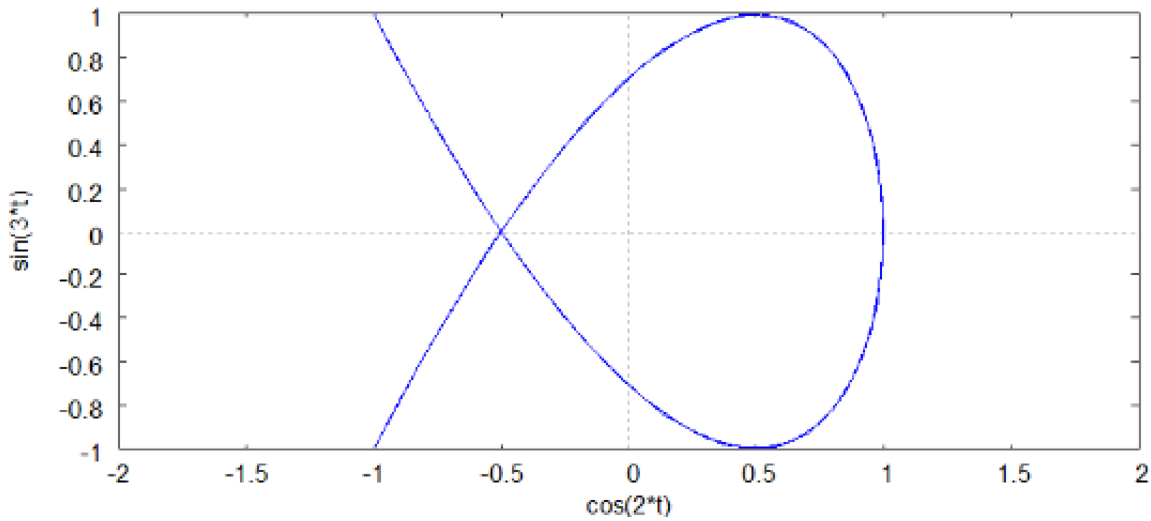
Построение графиков функций, заданных параметрически. Для построения графиков функций, заданных параметрически, ис пользуется опция parametric. Для построения графика указывается об ласть изменения параметра. Построим график функции, заданной уравнениями

$$x = \cos(2t)$$

$$y = \sin(3t)$$

для значений параметра $t \in [-\pi; \pi]$.

```
(%i11) plot2d([parametric, cos(2*t), sin(3*t), [t,%pi,%pi],
[nticks,80]],[x,  2,  2])$
```



Построение дискретных графиков.

Другой возможностью wxMaxima является возможность построения дискретных графиков с помощью опции

[discrete, X, Y].

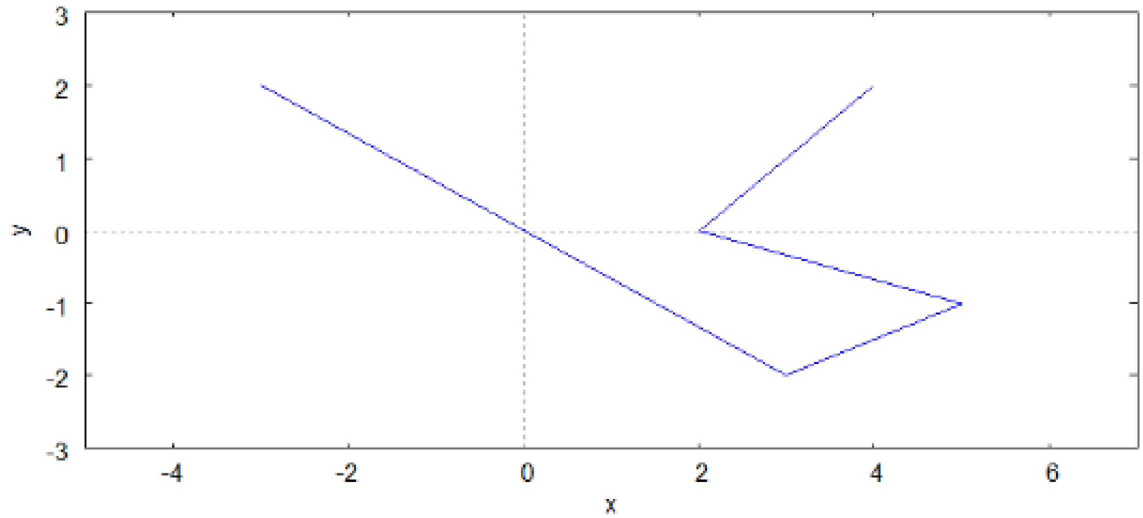
Здесь X – набор первых координат точек, Y – набор вторых координат точек. Таким образом, команда построения дискретно заданной функции выглядит так:

plot2d([discrete, X, Y], [x,a,b], [y,c,d],опции).

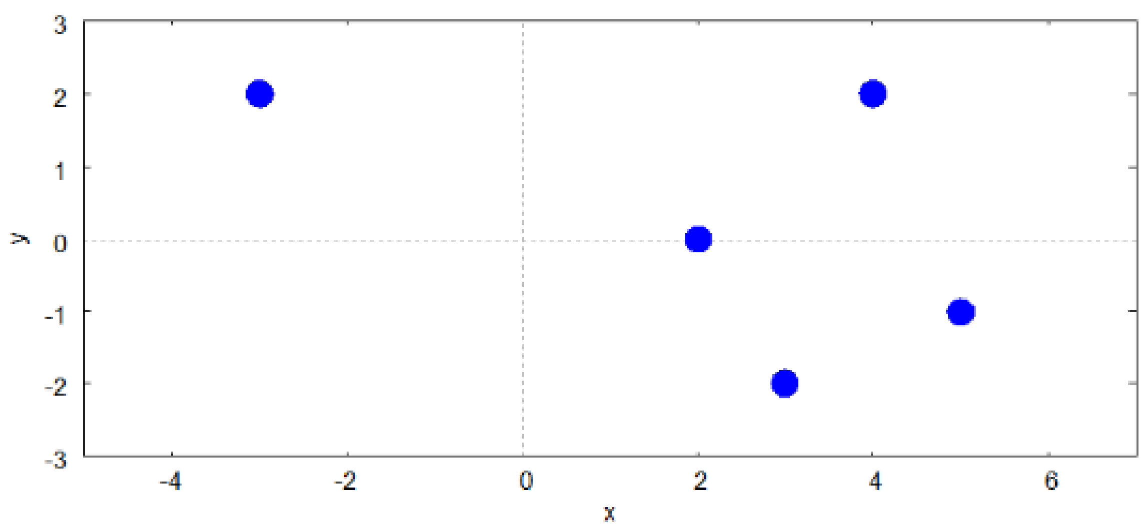
Эта команда нарисует график, построенный по точкам из списков X и Y для осей абсцисс и ординат соответственно. Вторым аргументом этой команды является диапазон значений $x \in [a;\ b]$. Третьим аргументом этой команды является диапазон значений $y \in [c;\ d]$.

Построим график функции, заданной точками для случаев, когда стиль точек выбирается автоматически

(%i12) plot2d([['discrete, [3,3,5,2,4], [2,2,1,0,2]]], [x,5,7],[y,3,3])$



и когда стиль точек выбирается вручную пользователем
(%i13) plot2d([['discrete, [3,3,5,2,4], [2,2,1,0,2]]],
[x,5,7],[y,3,3], [style, [points, 4, 1, 1]]);



Построение кривых в полярной системе координат.

Для построения графика в полярных координатах нужно задать изменение значений полярного радиуса и полярного угла. Пусть $r = r(f)$, где $(a \le f \le b)$ зависимость полярного радиуса r от полярного угла f. Тогда график этой функции в полярных координатах можно построить, задав у функции plot2d опцию

[gnuplot_preamble, "set polar"; "set zeroaxis"].

Данная опция будет действовать лишь при условии, что выбран формат графика gnuplot.

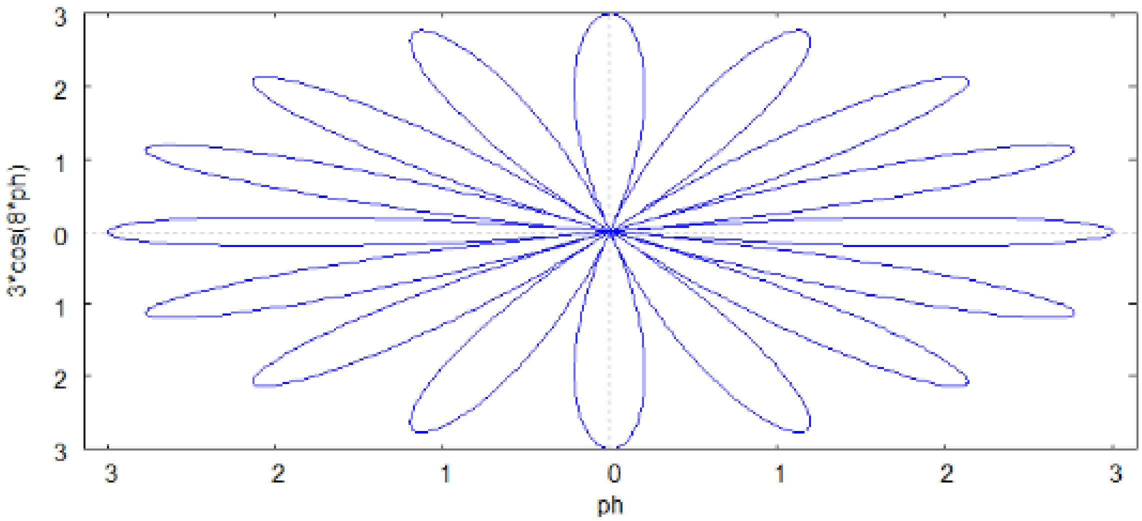
Для примера построим в полярных координатах график функции

$$r = 3\cos(8\varphi)$$

для $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Для создания графика используем команду:

(%i14) plot2d([3*cos(8*ph)], [ph,%pi,%pi],[gnuplot_preamble, "set polar" ,"set zeroaxis"], [plot_format,gnuplot])$



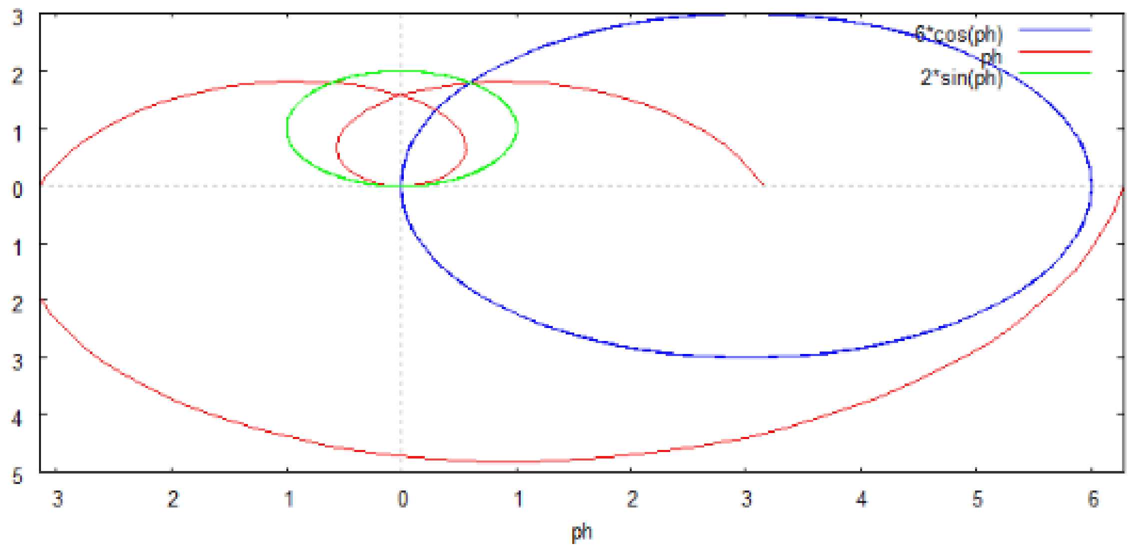
Построим в полярных координатах графики трех функций

$$r = 6\cos\varphi, \quad r = \varphi, \quad r = 2\sin\varphi$$

для $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Для создания графика используем команду:

(%i15) plot2d([6*cos(ph),ph,2*sin(ph)], [ph,%pi,2*%pi], [gnuplot_preamble,"set polar "set zeroaxis "set encoding koi8r"], [plot_format,gnuplot]);



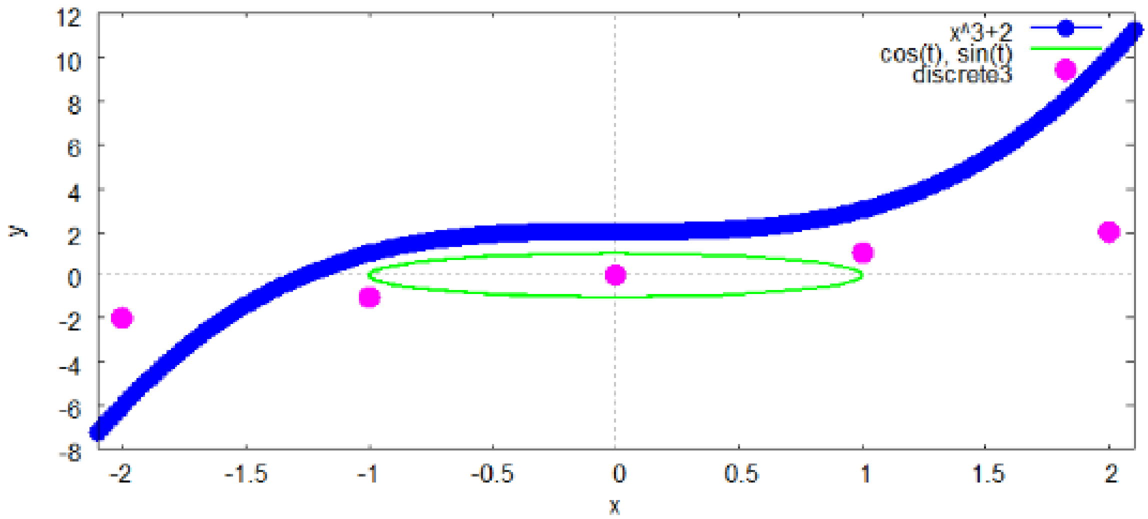
Можно комбинировать в одних осях графики кривых различного типа:

- явнозаданную функцию y=f(x),
- параметрически заданную функцию $x = x(t)$, $y = y(t)$
- дискретно заданную функцию (возможны и другие комбинации).

Например, построим в одной координатной плоскости функции

$x(t) = \cos(t)$

а также набор точек (−2; −2), (−1; −1), (0; 0), (1; 1), (2; 2).(%i16) plot2d([$x \wedge 3 +$ 2,
[parametric, cos(t), sin(t), [t, 5, 5], [nticks,100]], [discrete, [2,1,0,1,2],[2,1,0,1,2]]],
[x, 2.1, 2.1],
[xlabel, "x"],[ylabel, "y"],[style, [linespoints,2,2], [lines,2,3],[points, 3, 4, 1]])$

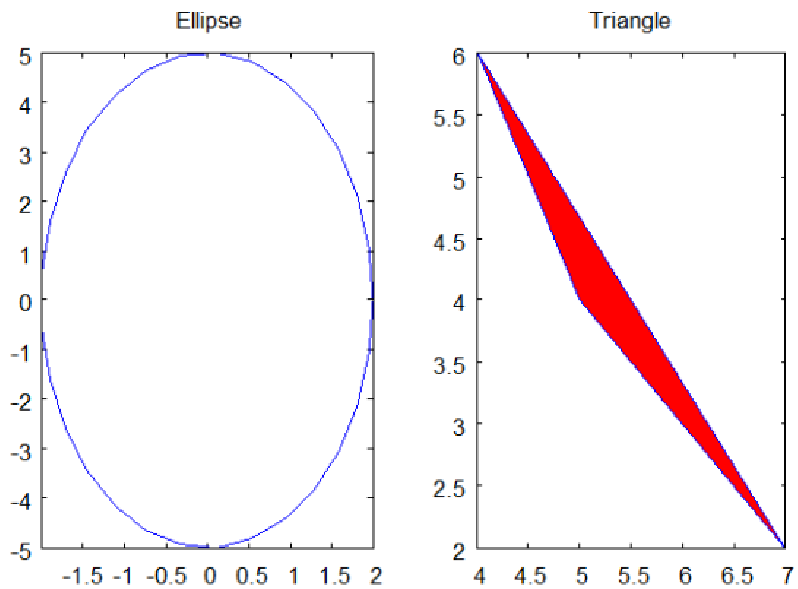


Кроме того, можно в переменную записать команду для построения графиков, а далее вывести эти графики на печать с помощью команды draw(dr1,gr2,...).

Для этого нужно подключить пакет draw командой

load(draw).

Например:
(%i17) load(draw)$
(%i18) scene1: gr2d(title="Ellipse" , nticks=30, parametric(2*cos(t),5*sin(t),t,0,2*%pi))$(%i19) scene2: gr2d(title="Triangle" , polygon([4,5,7], [6,4,2]))$
(%i20) draw(scene1, scene2, columns = 2)$



Для графического определения неравенств удобнее всего применять команду

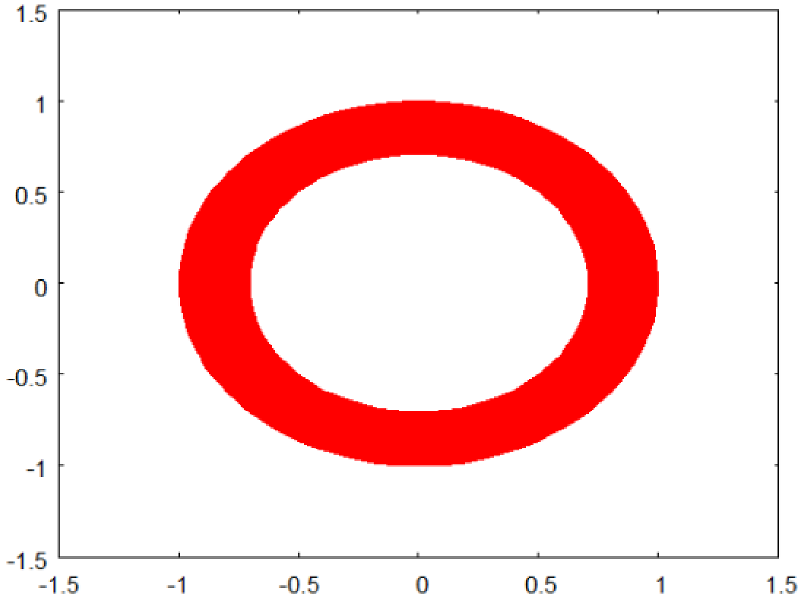
region(expr,var1,varmin1,varmax1, var2, varmin2,varmax2,...),

а построить его – с помощью команды draw.

(%i21) region($x \wedge 2 + y \wedge 2 < 1 and x \wedge 2 + y \wedge 2 > 1/2$, x, 1.5, 1.5, y, 1.5, 1.5);

(%i22) load(draw)$

(%i23) draw2d(x_voxel = 30, y_voxel = 30, region($x\wedge2+y\wedge2 <$ 1 and $x \wedge 2 + y \wedge 2 > 1/2$, x, 1.5, 1.5, y, 1.5, 1.5))$



Для построения анимационных графиков используется команда
with_slider_draw. Эта команда задается так:

with_slider_draw(param, dpar, expr).

Здесь param – имя параметра,

dpar – диапазон изменения параметра (удобно оформлять в виде списка makelist(ex,var,varmin,varmax). Здесь ex – выражение, определяещее список,var – переменная списка,varmin,varmax – диапазон изменения переменной списка),

expr – набор параметрических функций с настройками.

Кроме того, возможна настройка глобальных опций (аналогичных опциям в plot2d).

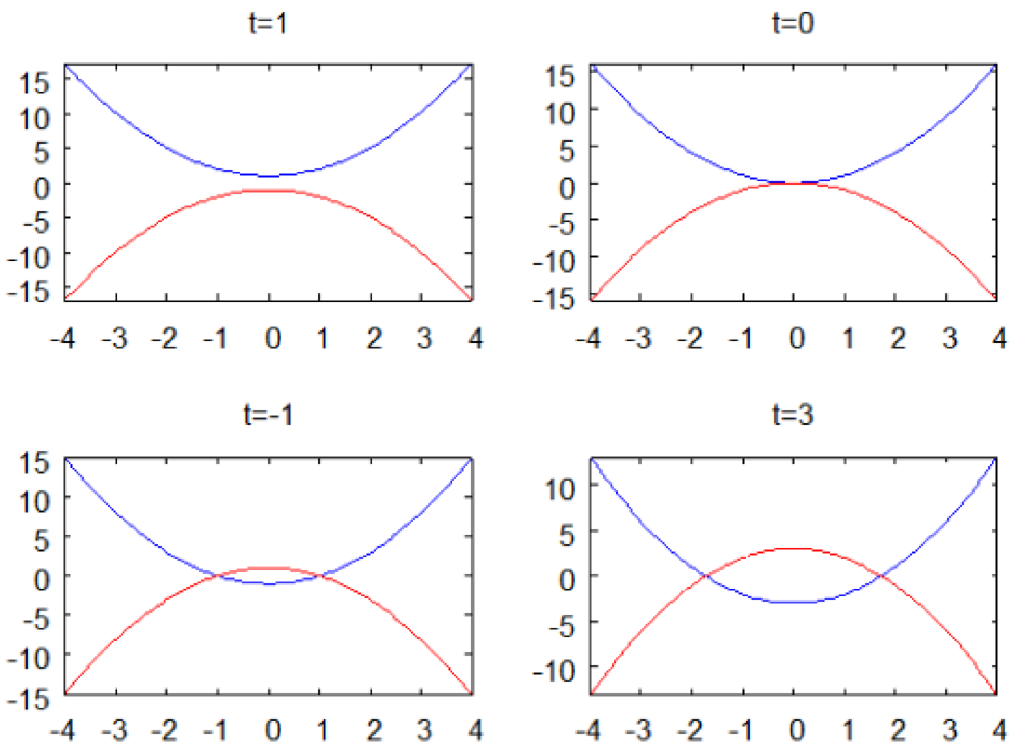
Для примера рассмотрим построение графиков двух парабол $y = x^2 - t$ и $y = -x^2 + t$, стремящихся друг к другу

(%i24) with_slider_draw(t, makelist(i*0.2+0.1,i,20,10), xrange = [10,10], yrange = [10,10], xaxis = true, yaxis =

true, color = blue, line_width = 2, explicit($x \wedge 2 - t$,x,10,10),
color = red, line_width = 2, explicit($-x \wedge 2 + t$,x,10,10))$

Выполнение анимации происходит при щелчке левой кнопки по графику и нажатии на кнопку пуск в меню. Саму анимацию и все примеры пособия можно посмотреть в файле Примеры.wxm. Поскольку просмотр анимации на бумаге невозможен, отобразим ее срезы для следующих значений

параметра $t = 1$, $t = 0$, $t = -1$, $t = 3$.



После запуска Maximaсессии мы видим перед собой такие строки:

Maxima restarted. (%i1)

Первая — это сообщение о том, что ядро Максимы только что запустилось (вместо нее, в зависимости от версии и конкретной сборки, может выводиться краткая информация о программе); вторая — приглашение к вводу первой команды. Команда в Максиме — это любая комбинация математических выражений и встроенных функций, завершенная, в простейшем случае, точкой с запятой. После ввода команды и нажатия «Enter» Maxima выведет результат и будет ожидать следующей команды:

```
Maxima restarted.
(%i1) (1/2+1/3+1/4)/(1/5+1/6+1/8);
(%o1) 130
      ---
      59
(%i2)
```

Для арифметических действий используются традиционные обозначения: , +, *, /; ** или ^ для возведения в степень, sqrt() для квадратного корня.

Далее будем пользоваться для наглядности упомянутым во врезке математическим режимом ввода редактора TeXmacs. К примеру, приведенный выше код выглядел бы так:

$$(\%i1)\quad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}};$$

$$(\%o1)\quad \frac{130}{59}$$

Если для каких-то обозначений будет неочевидно, как записать их в строку, это пояснено по ходу изложения.

Как видите, каждая ячейка имеет свою метку; эта метка — заключенное в скобки имя ячейки. Ячейки ввода именуются как %i с номером (i от *input* — ввод), ячейки вывода — как %o с соответствующим номером (o от *output* — вывод). Со знака % начинаются все встроенные служебные имена: чтобы, с одной стороны сделать их достаточно короткими и удобными в использовании, а с другой — избежать возможных накладок с пользовательскими именами, которые тоже часто удобно делать короткими. Благодаря такому единообразию вам не придется запоминать, как часто бывает в других системах, какие из таких коротких и удобных имен зарезервированы программой, а какие вы можете использовать для своих нужд. К примеру, внутренними именами %e и %pi обозначены общеизвестные математические постоянные; а через %c с номером обозначаются константы, используемые при интегрировании, для которых использование буквы «с» традиционно в математике.

При вводе мы можем обращаться к любой из предыдущих ячеек по ее имени, подставляя его в любые выражения. Кроме того последняя ячейка вывода обозначается через %, а последняя ячейка ввода — через _. Это позволяет обращаться к последнему результату, не отвлекаясь на то, каков его номер.

(%i2) $\% + \frac{47}{59};$

(%o2) 3

Здесь %+47/59 — то же самое, что %o1+47/59.

Вывод результата вычисления не всегда нужен на экране; его можно заглушить, завершив команду символом $ вместо ;. Заглушенный результатпри этом все равно вычисляется; как видите, в этом примере ячейки %o1 и
%o2 доступны, хотя и не показаны (к ячейке %o2 обращение идет через символ %, смысл которого расшифрован выше):

(%i1) $\sqrt{2}+3\$$

(%i2) $2\sqrt{2}+1\$$

(%i3) $\% - \%o1;$

(%o3) $\sqrt{2}-2$

Каждую следующую команду не обязательно писать с новой строки; если ввести несколько команд в одну строчку, каждой из них все равно будет соответствовать свое имя ячейки. К примеру, здесь в строке после метки %i1 введены ячейки от %i1 до %i4; в ячейке %i3 используются %i1 и %i2 (обозначенная как _ — предыдущий ввод):

(%i1) $\operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right)\$\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\right); \%i1+\_; \%o1+\%;$

(%o2) $\frac{\pi}{3}$

(%o3) $\frac{\pi}{2}$

(%o4) $\frac{2\pi}{3}$

В wxMaxima последнюю или единственную команду в строке можно не снабжать завершающим символом — это сработает так же, как если бы она была завершена ; , т. е. вывод заглушен не будет. В дальнейших примерах будем опускать ; . Если вы выберете другой интерфейс, не забывайте ее добавлять.
Помимо использования имен ячеек, мы, естественно, можем и сами давать имена любым выражениям. Подругому можно сказать, что мы присваиваем значения переменным, с той разницей, что в виде значения такой переменной может выступать любое математическое выражение. Делается это с помощью двоеточия — знак равенства оставлен уравнениям, которые, учитывая общий математический контекст записи, проще и привычнее так читаются. И к тому же, так как основной конек Максимы — символьная запись и аналитические вычисления, уравнения достаточно часто используются. Например:

(%i1) $\text{equation}: x^3 - x = 0\$$
(%i2) $\text{solve}(\text{equation})$

(%o2) $[x = -1, x = 1, x = 0]$

В какомто смысле двоеточие даже нагляднее в таком контексте, чем знак равенства: это можно понимать так, что мы задаем некое обозначение, а затем через двоеточие расшифровываем, что именно оно обозначает. После того, как выражение поименовано, мы в любой момент можем вызвать его по имени:

(%i3) $\text{diff}(\text{equation}, x)$

(%o3) $3x^2 - 1 = 0$

Любое имя можно очистить от присвоенного ему выражения функцией kill(), и освободить занимаемую этим выражением память. Для этого нужно просто набрать kill(name), где name — имя уничтожаемого выражения; причем это может быть как имя, назначенное вами, так и любая ячейка ввода или вывода. Точно так же можно очистить разом всю память и освободить все имена, введя kill(all). В этом случае очистятся, в том числе и все ячейки ввода вывода, и их нумерация опять начнется с единицы. В дальнейшем, если по контексту будет иметься в виду логическое продолжение предыдущих строк ввода вывода, будем продолжать нумерацию (этим приемом уже воспользовались выше). Когда же новый «сеанс» будет никак не связан с предыдущим, буду начинать нумерацию заново; это будет косвенным указанием сделать «kill(all)», если вы будете набирать примеры в Maxima, так как имена переменных и ячеек в таких «сеансах» могут повторяться.

Доступ к документации Максимы

В примерах выше мы воспользовались двумя встроенными функциями. Как нетрудно догадаться из контекста, solve — это функция решения уравнения, а diff — функция дифференцирования. Практически весь функционал Maxima реализован через такие встроенные функции. Функция в Maxima может иметь переменное число аргументов. Например, функция solve, которую мы использовали с одним аргументом, чаще вызывается с двумя аргументами. Первый задает уравнение или функцию, чьи корни надо найти; второй — переменную, относительно которой нужно решать уравнение:

(%i1) $\frac{a}{x}+a\,x=a^2\$$

(%i2) $\mathrm{solve}(\%,a)$

(%o2) $\left[a=\frac{x^2+1}{x},a=0\right]$

(%i3) $\mathrm{solve}(\%i1,x)$

(%o3) $\left[x=-\frac{\sqrt{a^2-4}-a}{2},x=\frac{\sqrt{a^2-4}+a}{2}\right]$

Если формула, задающая решаемое уравнение, содержит только один символ, как в предыдущем примере, то второй аргумент можно опустить, так как выбор, относительно чего нужно решать уравнение, все равно однозначен.

Вторая функция из наших новых знакомых — diff — также может принимать один аргумент; в этом случае она находит дифференциал заданного выражения:

$$\text{(\%i1)}\quad \mathrm{diff}\left(x\,y+\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{(\%o1)}\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{del}(y)+\left(y-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{del}(x)$$

Через del(x) и del(y) здесь обозначены дифференциалы соответствующих символов.

Для каждой встроенной функции есть описание в документации по Maxima. Оно содержит сведения о том, какие аргументы и в каких вариантах принимает функция, а также описание ее действия в разных случаях и конкретные примеры применения. Но, конечно, искать описание каждой нужной функции в htmlдокументации или infoстраницах не всегда удобно, тем более, что нужна эта информация, как правило, прямо в процессе работы. Поэтому в Maxima есть специальная функция — describe(), которая выдает информацию из документации по конкретным словам. Более того, специально для удобства получения справочной информации существует сокращенная версия вызова этой функции: ? name вместо describe(name). Здесь ? — это имя оператора, и аргумент нужно отделять от него пробелом (выражение ?name используется для вызова функции Lisp с именем name). Функция describe и оператор ? выдают список тех разделов помощи и имен функций, которые содержат заданный

текст, после чего предлагают ввести номер того раздела или описания той функции, которые вы хотите посмотреть:

```
(%i5) ? diff

 0: (maxima.info)Differentiation.
 1: Definitions for Differentiation.
 2: Differential Equations.
 3: Definitions for Differential Equations.
 4: antidiff :Definitions for Differentiation.
 5: covdiff :Definitions for itensor.
 6: diff <1> :Definitions for itensor.
 7: diff :Definitions for Differentiation.
 8: evundiff :Definitions for itensor.
 9: extdiff :Definitions for itensor.
 10: idiff :Definitions for itensor.
 11: liediff :Definitions for itensor.
 12: poisdiff :Definitions for Special Functions.
 13: ratdiff :Definitions for Polynomials.
 14: rediff :Definitions for itensor.
 15: setdifference :Definitions for Sets.
 16: symmdifference :Definitions for Sets.
 17: undiff :Definitions for itensor.
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none':
```

Когда вы выберете раздел, будет выдано его содержимое:

```
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none': 7
Info from file /usr/share/info/maxima.info:
 -- Function: diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)
 -- Function: diff (<expr>, <x>, <n>)
 -- Function: diff (<expr>, <x>)
 -- Function: diff (<expr>)
     Returns the derivative or differential of <expr> with respect to
     some or all variables in <expr>.

     'diff (<expr>, <x>, <n>)' returns the <n>'th derivative of <expr>
     with respect to <x>.

     'diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)' returns the mixed
     partial derivative of <expr> with respect to <x_1>, ..., <x_m>.
     It is equivalent to 'diff (... (diff (<expr>, <x_m>, <n_m>) ...),
     <x_1>, <n_1>)'.

     'diff (<expr>, <x>)' returns the first derivative of <expr> with
     respect to the variable <x>.

     'diff (<expr>)' returns the total differential of <expr>, that is
```

Если для слова, которое вы ввели после ? или describe, найдено единственное совпадение, его описание будет показано сразу.

Кроме справки, по многим функциям Maxima есть примеры их использования. Пример можно загрузить функцией example(). Вызов этой функции без аргумента отобразит список всех имен доступных примеров;

вызов вида example(name) загрузит в текущую сессию и выполнит указанный файл примера:

```
(%i1) example(solve)
(%i1)
(%i2) solve(asin(cos(3*x))*(f(x)-1),x)
'solve' is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

(%o2) $\left[x=\frac{\pi}{6}, f(x)=1\right]$

```
(%i3) ev(solve(5^f(x) = 125,f(x)),solveradcan)
```

(%o3) $\left[f(x)=\frac{\log(125)}{\log(5)}\right]$

```
(%i4) [4*x^2-y^2 = 12,x*y-x = 2]
```

(%o4) $[4\,x^2-y^2=12, x\,y-x=2]$

```
(%i5) solve(%,[x,y])
```

(%o5) $[[x=2, y=2], [x=0.5202594388652\,i-0.13312403573587, y=0.076783785237\!88-3.608003221870287\,i], [x=-0.520259438\backslash$
$8652\,i-0.13312403573587, y=3.608003221870287\,i+0.07678378523788], [x=-1.733751846381093, y=-0.15356757100197]]$

```
(%i6) solve(1+a*x+x^3,x)
```

(%o6) $\left[x=\left(-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4\,a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)a}{3\left(\frac{\sqrt{4a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, x=\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4\,a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)a}{3\left(\frac{\sqrt{4a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, x=\right.$
$\left.\left(\frac{\sqrt{4\,a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{a}{3\left(\frac{\sqrt{4a^3+27}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right]$

```
(%i7) solve(x^3-1)
```

(%o7) $\left[x=\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}, x=-\frac{\sqrt{3}\,i+1}{2}, x=1\right]$

Основные принципы

В Maxima фактически, мы можем использовать любой символ вне зависимости от того, присвоено ли ему какое то выражение. По умолчанию символ, связанный с любым выражением, будет представлять это выражение; символ, не связанный ни с чем, будет представлять самого себя, трактуемого опятьтаки как выражение. Поясним на примере:

(%i1) $a\,b$

(%o1) $a\,b$

(%i2) $a: x+y\$\; b: x-y\$$

(%i4) $a\,b$

(%o4) $(x-y)\,(y+x)$

Из этого следует, в частности, что в выражение автоматически подставляется значение входящего в него символа только в том случае, если это значение было приписано символу до определения выражения:

(%i5) $x:\frac{1}{2}\$y:\frac{1}{3}\$$

(%i7) $c:x-y\$$

(%i8) $a\,b;a\,c$

(%o8) $(x-y)\,(y+x)$

(%o9) $\frac{y+x}{6}$

Если некоторый символ уже имеет какоето значение, можем ли мы использовать в выражении сам этот символ, а не его значение? Конечно. Сделать это можно с помощью знака апострофа — введенный перед любым символом или выражением, он предотвращает его вычисление:

(%i10) $b+y$

(%o10) $-y+x+\frac{1}{3}$

(%i11) $b+\text{'}y$

(%o11) x

(%i12) $\text{'}(b+y)$

(%o12) $y+b$

Результат выражения %i12 был бы аналогичен и в том случае, если бы b и y не имели на тот момент никаких значений; таким образом, мы можем смело блокировать вычисление символа, даже не запоминая (или не зная), присвоены ли им вообще какието выражения.

Точно так же можно поступить с любой встроенной функцией, если мы хотим не выполнить ее, а использовать в своем математическом контексте. Например, уже упомянутая функция дифференцирования может пригодиться нам для обозначения производной в дифференциальном уравнении; в этом случае, конечно, вычислять ее не надо:

(%i1) $\text{'diff}(y,x)=y$

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y=y$

Благодаря описанным особенностям работа в Максиме, с одной стороны, становится во многом похожей на традиционную «ручную» работу с математическими формулами, что практически сводит на нет психологический барьер в начале работы с программой. С другой стороны, даже на этом начальном этапе вы фактически избавлены от наиболее рутинной ручной работы, вроде отслеживания текущих значений символов, и можете полностью сосредоточиться на самой задаче. Конечно, блокировка вычислений — это не единственный способ влиять на то, как Максима будет вычислять то или иное выражение; этим процессом можно управлять довольно гибко

6.2. Как различается ПО в зависимости от вида лицензии?

В основном имеющиеся виды лицензий можно отнести к четырем* основным группам.

1. **Проприетарное (proprietary software)**. Находится в частной собственности автора (правообладателя). Покупатель, как правило, приобретает только право на использование программы
2. **Условно-свободное (shareware).** Коммерческие программы с бесплатным периодом использования. Для полнофунционального использования требуется оплата. «Условность» может варьироваться от напоминания о необходимость приобретения платной лицензии пр и каждом запуске программы до выключения ключевых блоков, фактически делающего работу с программой невозможной.
3. **Свободное (free software)**. ПО, в отношении которого действуют права пользователя («свободы») на неограниченную установку, запуск, свободное использование, изучение, распространение и изменение. Google предоставляет бесплатный хостинг для разработки свободного ПО. Выбор лицензии при этом настоятельно рекомендуется ограничить предлагаемыми вариантами.
4. **Бесплатное (freeware)**. Как правило, это ПО, которое разрешено свободно распространять, но не изменять (исходный код недоступен – в этом важное отличие от free software)

	Проприетарное (proprietary software)	**Условно-свободное (shareware)**	**Свободное (free software)**	**Бесплатное (freeware)**
Лицензия	В качестве типичного примера можно привести лицензию Microsoft Windows. Она включает в себя большое количество запретов: в частности, обратная разработка, одновременная работа с системой нескольких пользователей и т.д. В случае отказа принять лицензию пользователь не может работать с программой. То есть для работы он ОБЯЗАН ее принять	Необходима для того, чтобы получить полнофункциональный продукт с неограниченным сроком использования	Свободная GNU General Public License (или GNU GPL, или просто GPL). Любая несвободная лицензия несовместима с GPL. BSD license (Berkley Software Distribution license) допускает проприетарное коммерческое использование ПО Важное отличие от proprietary software – пользователь может работать с программами (использовать их в деятельности), НЕ ПРИНИМАЯ лицензию. Это будет необходимо сделать только для получения	Freeware это иногда даже не лицензия (т.е. текст договора), скорее совокупность признаков: - программу можно использовать частному лицу для некоммерческих целей; - нельзя декомпилировать код; - автор не несет никакой ответственности за работу ПО

			дополнительных прав (напр., на распространение ПО)	
Использование	При использовании с целью получения прибыли необходима оплата. Но может быть разрешено бесплатно для некоммерческого использования	Как правило, запрещено без оплаты лицензии. Хотя на практике этим часто пренебрегают, но это нарушение	Свободное (не нужно приравнивать к бесплатному)	Свободное
Распространение	Обычно требуется оплата за каждую копию программы (на 1 компьютер / 1 пользователя), если не оговорено иное. Перепродажа, как правило, невозможна	Разрешено только при условии, что каждый, кто будет пользоваться программой, внесет лицензионную плату	Свободное. Полученное ПО возможно в дальнейшем продавать за плату (например, в случае модификации)	Несмотря на отсутствие цены, производитель может как разрешить, так и запретить свободное распространение
Изменение	В ПО с закрытым исходным кодом может быть запрет (ограничение) на модификацию (изменение) программного кода, декомпиляцию (процесс	Практически то же, что и для proprietary software	Свободное	Нет

	воссоздания исходного кода)			
Способы защиты	Технические (закрытый исходный код), правовые (коммерческая тайна, патенты)	Практически то же, что и для proprietary software	Не используются	Закрытый исходный код
Охраняется авторским правом	Да	Да	Да (на основе свободных лицензий)	Да
Возможность дальнейшей перепродажи	Нет	Нет	Есть	Нет
Способ распространения	Приобретение как коробочного продукта Full Package Product (FPP) в магазине, торгующем ПК и ПО; у владельца ПО и его компаний-партнеров. Для некоторого ПО предусмотрена покупка вместе с ПК - Original Equipment Manufacturer (OEM)	Само ПО обычно можно скачать в интернете (находится в свободном доступе), при приобретении коммерческой версии у продавца приобретается регистрационный ключ	Практически все программы опубликованы в Интернете в свободном доступе, а также исходные тексты. Возможно коммерческое распространение	Как правило, можно скачать в интернете в исполнимом виде без исходных кодов
Доступность	Да (Open source –	Как правило, нет	Да (Open source)	Нет

исходного кода	открытый код) или нет			
Техподдержка, исправление ошибок в ПО	Есть, как правило, в виде службы поддержки; но может поставляться «как есть» и без гарантий. Техподдержка может быть платной	Практически то же, что и для proprietary software	Нет, но по факту предоставляется самим сообществом разработчиков ПО; может предоставляться и платно специализирующимися на этом фирмами	Нет

6.3. Тематика творческих проектов (предварительный список)

1. Геометрия/анализ
    - 01.Эквидистанты плоской кривой
    - 02.Кривые, равноудалённые от точки и кривой
    - 03.Кривые, равноудалённые от двух других кривых
    - 04.Эквидистанты пространственных кривых (eg, тор)
    - 05.Эволюта и эвольвента
    - 06.Геодезические на поверхностях
    - 07.Интерполяции и сплайны
    - 08.Метод наименьших квадратов
    - 09.Метод хорд и касательных
    - 10.Нумерация всех подмножеств конечного множества
    - 11.Нумерация целочисленной решётки на плоскости и в пространстве
    - 12.Кривые в полярных координатах
    - 13.Анимация параметрических кривых
    - 14.Комплексные функции одной действительной переменной
    - 15.Нечеткая логика и оценки рисков
    - 16.Оплётка тора (анимация)
    - 17.Модель «хищник-жертва»

2. Физика
    - 01.Фигуры Лиссажу
    - 02.Движение двух небесных тел вокруг общего центра тяжести
    - 03.Задача трёх тел – примеры
    - 04.Маятник с движущимся подвесом
    - 05.Маятник с шарниром (двойной маятник)
    - 06.Скорость горения конической свечи
    - 07.Циклоиды и видимое движение планет
    - 08.Движение цепи, соскальзывающей со стола
    - 09.Особенности волновых фронтов
    - 10.Каустики плоской кривой
        1. Параллельный пучок лучей
        2. Точечный источник света
        3. Собственное излучение
    - 11.Каустики поверхностей