

Приложение 2.4.1

УТВЕРЖДАЮ

Декан Инженерной школы
(факультета)

Московского политехнического
университета

О.Н. Пронская



«28»

декабря

2024 г.

Учебно-методическое пособие

для углубленного изучения предмета «Математика» в рамках проекта

«Предпринимательский класс в московской школе»

(10–11 классы)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский политехнический университет»

Учебно-методическое пособие
**МАТЕМАТИКА В ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСКОМ КЛАССЕ
МОСКОВСКОЙ ШКОЛЫ
(УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ)
(10-11 КЛАСС)**

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Р.Г. Идрисов

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Методические рекомендации.....	4
3. Задача о предпочтениях на множестве альтернатив	6
4. Платежи по процентам. Вклады и кредит	11
Банковский вклад	11
Банковский кредит. Аннуитетный платеж	16
Банковский кредит. Дифференцированный платеж.....	18
Банковский кредит. Другие схемы платежей.....	19
5. Оптимизация процессов	25
6. Альтернативные издержки	37
7. Кривая производственных возможностей	42
8. Спрос и предложение. Рыночное равновесие	47
9. Производство и издержки. Выручка. Прибыль	51
10. Описательная статистика	66
Виды средних величин	66
11. Аналитическая статистика	76
Показатели вариации и способы их расчета	76
Ответы к заданиям	83
Используемая литература.....	94

1. Введение

Механизм экономических отношений в задачах коммерческой деятельности описывается целым рядом взаимосвязанных показателей: товарооборот, рентабельность, издержки обращения, ассортимент товаров, площадь торговых залов и подсобных помещений, количество и квалификация работников, виды торгового оборудования, товарные запасы, система обработки документов, форма обслуживания покупателей и т.д. На величину этих показателей влияют такие факторы, как ритмичность, частота и объемы поставок товаров, ассортимент и качество завозимых товаров, наличие и исправность торгового оборудования, количество работающих и др.

Математические модели в экономике разрабатываются для двух целей: лучшего понимания объективной реальности и выработки рационального варианта действий и выбора оптимальных решений в практической деятельности.

Моделирование дает лицам, осуществляющим коммерческую деятельность, вспомогательный, удобный, простой, быстрый, дешевый и эффективный инструмент, особенно с использованием компьютеров, позволяющий за секунды осуществить перебор и сравнение множества вариантов решения и выбрать из них лучшее.

О некоторых примерах таких моделей и важности экономико-математического моделирования можно прочесть в книге [1].

Пособие содержит примеры решения некоторых задач с пояснениями и решениями, задачи для самостоятельного разбора. Тематический охват позволяет использовать его при подготовке к ЕГЭ по математике в части решения задач с экономическим содержанием: платежи по процентам (вклады и кредит), оптимизация процессов.

В пособии приведены задачи для подготовки к практическому этапу Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Предпринимательский класс в московской школе» по направлению «Предпринимательское». Так, например, для подготовки к решению кейсовых задач указанного конкурса могут быть использованы задачи разделов: альтернативные издержки; кривая производственных возможностей, спрос и предложение; рыночное равновесие.

Как для подготовки к конкурсу, так и для углубленного изучения в курсе «Алгебра и начала анализа» в пособии представлены задачи практического содержания по статистике и теории вероятностей, связанные с анализом реальных данных, представленных в табличной форме, на выбор оптимального варианта, на применение описательных характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значения, размаха, дисперсии и отклонения.

2. Методические рекомендации

В современном мире усиливается роль фундаментальных наук по причине того, что развитие прикладных экономических дисциплин связано с высоким уровнем их формализации. Математика лежит в основе экономического образования и является языком финансовых исследований. Эти факторы объясняют необходимость связи преподавания математики с потребностями в экономических профессиях.

Программа курса предусматривает формирование современного теоретического уровня математических и экономических знаний, а также практического опыта решения экономических задач, овладение приемами исследовательской деятельности. Идея курса демонстрирует, как математические знания соотносятся с профессиями, в которых задействована экономика, и в каких областях экономики можно использовать математические знания.

Курс предусматривает классно-урочную систему обучения. Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется на большом числе прилагаемых задач для самостоятельного решения.

Формирование важнейших умений и навыков происходит на фоне развития умственной деятельности – дети учатся анализировать конкретные экономические ситуации, замечать существенное, выявлять общее и делать выводы, переносить известные приемы в нестандартные ситуации, в том числе и встречающиеся в прессе, находить пути их решения.

Условием, позволяющим правильно построить учебный процесс, является то, что изучение каждой темы начинается с актуализации у обучающихся необходимых экономических терминов, соотношений, математических понятий и методов решения задач, выделяется главное и, исходя из этого, дифференцируется материал: определяются те задачи, с помощью которых происходит отработка знаний, умений и навыков, и, те, которые служат развитию, побуждению интереса. Чтобы усвоение материала было более эффективным, делается опора на особенности соотношения конкретного и абстрактного мышления учащихся данного возраста.

Методическими рекомендациями для учителя в каждой теме являются основные теоретические сведения, формулы, необходимые для работы, детальные разборы и решения типовых задач, предлагаемых к изучению обучающимися.

Особое внимание следует уделять развитию правильной математической речи: учащимся предлагается объяснять свои действия, вслух доказывать свою точку зрения по поводу конкретного экономического процесса или явления, ссылаться на известные правила, факты, высказывать догадки, предлагать способы решения, задавать вопросы, публично выступать.

Предполагается развитие не только общеучебных умений учащихся, но и навыков организации элементарной предпринимательской деятельности.

Критериями эффективности изучения курса и формой контроля считаются выработка адекватных представлений о сути экономических явлений и их

взаимосвязи, умения выражать аргументированные суждения по экономическим вопросам, обретение опыта в анализе конкретных экономических ситуаций и формирование практических навыков принятия экономических решений, аналитически проверенных средствами математики. Дополнительными материалами для проведения диагностических работ качества освоения учебного материала могут стать задачи предложенных проверочных работ. Их четыре и включают:

1. задания по разделу о платежах по процентам (вклады, кредит);
2. задания на оптимизацию процессов;
3. задания по основным бизнес-процессам (производство, прибыль, доход, издержки, выручка, производственные возможности);
4. задания по статистике.

3. Задача о предпочтениях на множестве альтернатив

Рассмотрим интересный пример из реальной жизни, описывающий ситуацию, с которой так или иначе встречается каждый. Отметим, что подобные задачи не включаются в основную программу по математике школьного курса, но являются отличной иллюстрацией того, как математика формирует функциональную грамотность у обучающихся, в частности, понимание того, что рациональный выбор в любой ситуации – это вывод, обоснованный строго математически. Эти задачи побуждают интерес к применению средств математики в экономических задачах.

Смоделируем задачу коммерческой деятельности при задании отношений предпочтения на множестве альтернатив.

Предпочтение можно представить в виде матрицы доминирования – безразличия сначала на основе субъективного, а затем коллективного представления. Однако в большинстве случаев личность в коммерческой сфере является носителем интересов какой-либо организации, поэтому выявление предпочтений должно базироваться на логических, причинно-следственных, а не на личностно-психологических мотивах.

В практической деятельности приходится рассматривать сложные объекты, которые невозможно целостно сопоставить.

При формировании ассортимента товаров [2] процесс анализа спроса всегда связан с решением задачи сравнения, выбора товара из предлагаемого множества. Выявить предпочтение на множестве товаров значит указать множество всех пар, для которых, например, товар a_i предпочтительнее a_j . В таком случае отношение предпочтения, доминирования при сравнении записывают как $b_{ij} = 2$, тогда $b_{ji} = 0$, а отношение безразличия, равнозначности – как $b_{ij} = 1$. В таком случае лицо, выбирающее решение, может провести попарное сравнение всех объектов этого множества, указав для каждой пары (a, b) наличие или отсутствие предпочтения. Например, можно осуществить выбор среди напитков: фанты, пепси, компот, чай, кофе. Предпочтение можно представить в виде матрицы доминирования – безразличия на основе субъективного или коллективного анализа. Первичная информация задается в виде таблицы множества сравниваемых объектов a, b, c, d, e , наименования показателей $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ и их значений по каждому объекту, например, для товара a : $p_1(a), p_2(a), \dots, p_i(a), \dots, p_n(a)$. Если по каждому показателю p_i можно вычислить его вес M_i , определяющий его значимость, то взвешенную сумму этих показателей можно рассматривать как суммарную оценку объекта a , его качество

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n M_i p_i(a).$$

Тогда можно ввести решающее правило: объект a предпочтительнее b , если $Q(a) > Q(b)$. По указанной системе решающих правил отношение,

выражающее доминирование, определяется построением матрицы попарного сравнения показателей, элемент которой b_{ij} определяется так:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i \text{ равнозначен } p_j, \\ 0, & \text{если } p_i \text{ менее значим, чем } p_j, \\ 2, & \text{если } p_i \text{ доминирует над } p_j. \end{cases}$$

Задача 3.1. Рассмотрим решение задачи выбора легкового автомобиля. В таблице 1 записано множество показателей, по которым можно провести их сравнение.

Таблица 1.

Показатель	Марка автомобиля				
	Ford Focus	Hyundai Solaris	Mitsubishi Lancer	Toyota Corolla	Nissan Almera
Объем двигателя, см ³	1587	1591	1590	1593	1596
Максимальная скорость, км/ч, V_{max}	189	180	180	195	177
Время разгона до 100 км/ч, T_p , с	11,9	11	14	12,1	13,1
Расход топлива: город/шоссе/средний, л/100 км, P_T	10/5,8/ 7,5	8,6/5,2/ 6,5	9,4/6,1/ 7,3	8,4/5,7/ 6,7	8,7/5,5/ 6,6
Мощность, л. с., W	105	123	117	124	107
Масса снаряженная/ полная, кг, M	1290/ 1825	1110/ 1565	1255/ 1750	1300/ 1655	1185/ 1700
Рейтинг угодности, P_y	4	5	2	1	3
Цена, тыс. руб.	620	560	679	659	540

Наиболее существенные показатели сопоставим с помощью метода парных сравнений, а результаты запишем в таблицу

	P_y	P_T	T_p	M	W	V_{max}	S_i	M_i	R_i
P_y	1	2	2	2	2	2	11	0,31	1
P_T	0	1	2	2	2	2	9	0,25	2
T_p	0	0	1	2	2	2	7	0,19	3
M	0	0	0	1	0	0	1	0,03	6
W	0	0	0	2	1	0	3	0,08	5
V_{max}	0	0	0	2	2	1	5	0,14	4

После заполнения матрицы элементами сравнения находим по строкам суммы баллов (S_i) по каждому показателю

$$S_i = \sum_{j=1}^n b_{ij},$$

где n - количество показателей, $n = 6$.

Правильность заполнения матрицы определяется равенством

$$\sum_{i=1}^n S_i = n^2.$$

Затем определяем вес показателей M_i по формуле

$$M_i = \frac{S_i}{n^2} = \frac{S_i}{36}$$

Следует заметить, что

$$\sum_{i=1}^n M_i = 1.$$

Приоритет показателей распределяется по рангу R_i , который пропорционален значению коэффициента веса: чем больше его значение, тем выше ранг, причем наибольшему значению M_i соответствует $R_i = 1$. На этом основании ранжированный перечень потребительских характеристик автомобиля будет иметь следующий вид:

- 1) P_y – рейтинг угоняемости;
- 2) P_T – расход топлива на 100 км, л;
- 3) T_p – время разгона до 100 км/ч, с;
- 4) V_{max} – максимальная скорость, км/ч;
- 5) W – мощность двигателя, л.с.;
- 6) M – масса, кг.

Для объективного вычисления значений целевой функции по каждому автомобилю введем балльную оценку показателей. Предположим, что чем лучше качественное содержание показателя, тем выше балл его оценки. Тогда, используя данные табл. 1, можно построить следующую матрицу балльных оценок $B_i(p_i)$ показателей.

Таблица 2.

	1	2	3	4	5	M_i
P_y	1	2	3	4	5	0,31
P_T	7,2–7,4	6,9–7,1	6,6–6,8	6,3–6,5	6,0–6,2	0,25
T_p	13,1–14	12,1–13	11,1–12	10,1–11	9,1–10	0,19
V_{max}	176–178	179–181	182–184	185–187	188–190	0,14
W	98–102	103–107	108–112	113–117	118–122	0,08
M	1570–1609	1610–1649	1650–1689	1690–1729	1730–1769	0,03

На основе данных табл. 2 можно вычислить значения интегральных оценок качества автомобилей без учета цены по формуле

$$Q(a_i) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot B_i(p_i).$$

На этом основании с учетом данных табл. 1.4 можно записать

$$Q(a_i) = 0,31B(P_y) + 0,25B(P_T) + 0,19B(T_p) + 0,14B(V_{max}) + 0,08B(W) + 0,03B(M).$$

В соответствии с этим выражением вычислим интегральные оценки качества автомобилей

$$Q_{Focus} = 0,31 \cdot 4 + 0,25 \cdot 5 + 0,19 \cdot 3 + 0,14 \cdot 5 + 0,08 \cdot 2 + 0,03 \cdot 5 = 3,82;$$

$$Q_{Solaris} = 0,31 \cdot 5 + 0,25 \cdot 4 + 0,19 \cdot 4 + 0,14 \cdot 2 + 0,08 \cdot 5 + 0,03 \cdot 4 = 4,11;$$

$$Q_{Lancer} = 0,31 \cdot 2 + 0,25 \cdot 1 + 0,19 \cdot 1 + 0,14 \cdot 2 + 0,08 \cdot 4 + 0,03 \cdot 5 = 1,81;$$

$$Q_{Corolla} = 0,31 \cdot 1 + 0,25 \cdot 1 + 0,19 \cdot 3 + 0,14 \cdot 3 + 0,08 \cdot 5 + 0,03 \cdot 1 = 1,98;$$

$Q_{Almera} = 0,31 \cdot 3 + 0,25 \cdot 2 + 0,19 \cdot 2 + 0,14 \cdot 1 + 0,08 \cdot 2 + 0,03 \cdot 5 = 2,26$.
Поскольку

$$Q_{Solaris} > Q_{Focus} > Q_{Almera} > Q_{Corolla} > Q_{Lancer},$$

то следует выбрать автомобиль Hyundai Solaris. Если предположить, что интегральные оценки отображают качество автомобилей, то выбор можно провести по минимальному отношению цена/качество

$$Ц/Q_{Focus} = 620/3,82 = 162,3; Ц/Q_{Solaris} = 560/4,11 = 136,25;$$

$$Ц/Q_{Lancer} = 679/1,81 = 375,2; Ц/Q_{Corolla} = 659/1,98 = 332,8;$$

$$Ц/Q_{Almera} = 540/2,26 = 238,9.$$

Минимальное отношение цена/качество показывает на выбор автомобиля Hyundai Solaris.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2. Проведите моделирование процесса выбора товара на основе следующих данных:

а) швейцарские механические мужские наручные часы

Фирма	Калибр, мм	Число функциональных камней	Точность хода, с/сутки	Время непрерывной работы, ч	Водонепроницаемость, м	Дополнительно, шт.			Цена, долл.
						циферблат	шкалы	функции	
Breitling	36,0; 5,4	31	$\pm 0,2$	42	100	3	1	1	320
Bucherer	29,6; 3,58	25	$\pm 2,8$	38	30	1	0	0	210
Longines	32,0; 3,85	27	$-0,8$	42	30	1	1	1	230
Omega	27,2; 3,16	37	0,05	48	100	1	0	0	260
Rado	23,5; 3,2	25	± 2	40	200	1	0	2	350
Tissot	34,2; 4,2	25	$\pm 1,5$	42	150	1	0	0	350

б) автомобили кроссоверы, полноприводные с автоматической коробкой передач

Показатель	Марка автомобиля								
	Honda CRV	Skoda Yeti	Hyundai ix35	KIA Sportage	Mazda CX5	Mitsubishi ASX	Toyota RAV4	VW Tiguan	Nissan Qashqai
Цена, тыс. руб.	1219	1029	1069	1110	1245	1059	11 104	1050	1030
Мощность, л. с.	150	152	150	150	150	150	148	150	141
Расход топлива, л/100 км (город/шоссе)	10,2/ 6,3/7,7	10,6/ 6,8/8,0	10,6/ 6,8/8,2	10,6/ 6,8/8,2	8,2/ 5,9/6,7	10,5/ 6,8/8,1	9,6/ 6,5/7,6	10,1/ 6,7/8,0	10,8/ 6,8/8,2
Расходы на бензин, за 60000 тыс. км, руб.	192 780	190 890	200 340	200 340	154 908	198 450	181 440	190 890	204 120
Расходы на три плановых ТО, руб.	30 973	20 100	18 887	26 442	26 850	23 348	26 500	25 867	29 692

Снаряженная масса, кг	1580	1540	1601	1469	1455	1455	1580	1621	1454
Клиренс, мм	170	180	170	172	210	195	180	200	200
Рейтинг угоняемости, шт./год	124	0	18	31	0	7	85	3	62
Объем багажника, л	589	405	591	564	463	415	410	470	410
ОСАГО за 3 года, руб.	16 632	9900	16 632	16 632	16 632	16 632	16 632	16 632	14256
Все расходы на эксплуатацию за 3 года, руб.	618 275	529 590	684 822	720 671	571 590	503 108	566 812	681 559	639 468
Разгон до 100 км/ч, с	12,8	9,0	11,2	11,2	9,8	11,9	11,5	9,6	11,3
Снижение цены через 3 года, %	31	30	42	43	30	25	31	41	31

Отметим, что в предложенных задачах не может быть указан верный ответ, поскольку принцип их решения предполагает выбор из альтернатив, а выбор, как известно, всегда субъективен и основан на приоритете тех или иных качеств, который у каждого свой.

4. Платежи по процентам. Вклады и кредит

Банковский вклад

Вклад – это денежная сумма, которую банк принимает от вкладчика, в целях хранения данных средств и начисления на них процентов (дохода от вклада). Доход по вкладу выплачивается в денежной форме в виде процентов.

Начисление процентов может производиться следующим образом:

- ежемесячно – проценты прибыли прибавляются к основному вкладу каждый месяц.
- к концу срока – проценты прибыли присоединятся к основной сумме вклада в конце срока вклада.
- в иной срок, например, ежеквартально (проценты начисляются каждые 3 месяца), либо каждые полгода, либо еженедельно.

Если человек открыл вклад в банке в сумме A рублей под $r\%$ на определенный период времени, то по окончании срока его сумма увеличится на $r\%$ или в $(1 + 0,01r)$ раз и будет равна $A(1 + 0,01r)$ рублей.

Капитализация процентов по вкладам представляет собой ежемесячное или ежеквартальное причисление процентов на банковский счёт. Таким образом, в следующем периоде проценты будут начисляться уже на большую сумму, что увеличит итоговую прибыль. В народе это называют «проценты на проценты», в финансах – «сложные проценты». Другими словами, капитализация процентов – это процесс, при котором доход по вкладу начисляется частями на протяжении времени хранения денег в банке. Если человек положил A рублей в банк с учетом капитализации процентов под $r\%$ годовых, то каждый месяц ему по вкладу начисляется $r\%/12$.

Формула, по которой рассчитывается сумма вклада с учетом капитализации процентов под $r\%$ годовых:

$$C = A \left(1 + \frac{r}{12 \cdot 100} \right)^n.$$

C – сумма вклада с учетом капитализации процентов;

A – первоначальная сумма;

n – время хранения денег в банке (количество месяцев).

Рассмотрим ряд задач из [3].

Задача 4.1.

Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначально 1 января вносится целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 8% по сравнению с его размером в начале года. В начале второго и 4 годов вносится дополнительно 2 и 3 миллиона рублей соответственно. Какую наибольшую сумму можно внести первоначально, если размер вклада после 4 лет не должен превышать 28 млн рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $p = 1,08$, S – первоначальный вклад. В таблице представим динамику счета в течение 4 лет.

Год	Вклад до начисления процентов	Вклад после внесения дополнительных сумм	Вклад в конце года после начисления процентов
0			S
1	S		Sp
2	Sp	$Sp + 2$	$(Sp + 2)p$
3	$(Sp + 2)p$		$(Sp + 2)p^2$
4	$(Sp + 2)p^2$	$(Sp + 2)p^2 + 3$	$((Sp + 2)p^2 + 3)p$

По условию задачи, вклад в конце четвертого года не превосходит 28 млн рублей. Поэтому

$$((Sp + 2)p^2 + 3)p \leq 28$$

Подставив данное значение $p = 1,08$ получим неравенство

$$((1,08S + 2)1,08^2 + 3)1,08 \leq 28.$$

Решая которое, получим

$$S \leq \frac{86,87725}{5,31441}.$$

Заметим, что целая часть дроби $\left[\frac{86,87725}{5,31441} \right] = 16$. Так как S число целое, то

$$S \leq 16.$$

Ответ. $S = 16$.

Задача 4.2.

Иван Иванович помещает свои деньги в банк под проценты на два года. В первый год банк начисляет $m\%$ на вклад. После первого года Иван Иванович собирается доложить 5% от текущей суммы вклада. Во второй год банк начисляет $n\%$ годовых. Известно, что $n + m = 20$. При каком значении n сумма вклада после двух лет будет максимальной?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – первоначальный вклад. Учтем, что $m = 20 - n$. В таблице представим динамику счета в течение 2 лет.

Год	Вклад до начисления процентов	Вклад после внесения дополнительных сумм	Вклад в конце года после начисления процентов
1	S		$S \left(1 + \frac{m}{100} \right)$
2	$S \left(1 + \frac{m}{100} \right)$	$S \left(1 + \frac{m}{100} \right) \cdot 1,05$	$S \left(1 + \frac{m}{100} \right) \cdot 1,05 \cdot \left(1 + \frac{20 - m}{100} \right)$

Вклад в конце года после начисления процентов принимает наибольшее значение.

$$S \left(1 + \frac{m}{100} \right) \cdot 1,05 \cdot \left(1 + \frac{20 - m}{100} \right) \rightarrow \max.$$

Откуда

$$\left(1 + \frac{m}{100}\right) \cdot 1,05 \cdot \left(1,2 - \frac{m}{100}\right) \rightarrow \max.$$

После замены $\frac{m}{100} = x, 0 \leq x \leq 0,2$ Задача сводится к поиску максимума функции

$$f(x) = 1,05 \cdot (1 + x)(1,2 - x) \rightarrow \max.$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз (коэффициент перед квадратичным слагаемым отрицательный). Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы

$$x_0 = \frac{-0,2}{-2} = 0,1 \in [0; 0,2].$$

Тогда $\frac{m}{100} = 0,1; m = 10; n = 20 - m = 10$. Таким образом, если банк будет начислять оба года 10%, то к концу второго года сумма вклада окажется максимальной.

Ответ. $n = 10$.

Задача 4.3.

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» – увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое число n % и за второй, и за третий года. Найдите наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – первоначальный вклад. В таблице представим динамику счета в течение трех лет и по вкладу «А», и по вкладу «Б».

Год	Вклад «А»		Вклад «Б»	
	Начало года	Конец года	Начало года	Конец года
1	S	$1,1S$	S	$1,08S$
2	$1,1S$	$1,21S$	$1,08S$	$1,08S \left(1 + \frac{n}{100}\right)$
3	$1,21S$	$1,331S$	$1,08S \left(1 + \frac{n}{100}\right)$	$1,08S \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2$

По условию задачи, вклад «Б» к концу 3 года должен быть выгоднее вклада «А».

$$1,331S < 1,08S \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2,$$

$$\frac{1331}{1080} < \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2.$$

Последовательно подставляя $n = 1, 2, \dots$, последнее неравенство будет верным при $n = 12$. Следовательно, наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» равно 12.

Ответ. 12

Задача 4.4.

Вклад планируется открыть на несколько лет. В конце каждого года вклад увеличивается на 8 % по сравнению с его размером в начале года. Первоначально 1 января вносится 18 млн рублей. В начале второго года вносится дополнительно 2 млн рублей. На какое минимальное число лет можно открыть вклад, чтобы по истечении срока размер вклада был не менее 28 млн рублей?

Решение.

Представим динамику вклада в табличной форме.

Год	Вклад к концу года
0	18
1	$18 \cdot 1,08 = 19,44$
2	$21,44 \cdot 1,08 = 23,1552$
3	$21,44 \cdot 1,08^2 = 25,007616$
4	$21,44 \cdot 1,08^3 = 27,00822528$
5	$21,44 \cdot 1,08^4 = 29,1688833024$

После 4 лет сумма вклада еще не достигла 28 млн рублей. После 5 лет сумма вклада превысила 29 млн рублей. Значит вклад нужно открывать на 5 лет.

Ответ. 5 лет.

Еще подобные задачи представлены в [4], [5].

Задача 4.5.

Вклад планируется открыть на пять лет. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. В любое время можно снять часть суммы, однако процент за этот и следующие года составит 1%. Первоначально 1 января вносится целое число миллионов рублей. В начале второго и четвертого годов вносится дополнительно 1 и 4 млн рублей соответственно. В начале третьего или пятого годов (на выбор вкладчика) придется снять 5 млн рублей. Какую наименьшую сумму может внести вкладчик первоначально, если размер вклада после 5 лет должен превышать 28 млн рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – первоначальный вклад. Заметим, что чем позже снять 5 млн рублей, тем больше окажется вклад через 5 лет. Учтем этот факт, представляя в таблице динамику счета за 5 лет.

Год	Вклад в начале года	Вклад после внесения или снятия средств	Вклад после внесения или снятия средств
0			S
1	S		Sp

2	$1,1S$	$1,1S + 1$	$(1,1S + 1)1,1$
3	$(1,1S + 1)1,1$		$(1,1S + 1)1,21$
4	$(1,1S + 1)1,21$	$(1,1S + 1)1,21 + 4$	$((1,1S + 1)1,21 + 4)1,1$
5	$((1,1S + 1)1,21 + 4)1,1$	$((1,1S + 1)1,21 + 4)1,1 - 5$	$((1,1S + 1)1,21 + 4)1,1 - 5) \cdot 1,01$

По условию задачи, размер вклада после 5 лет должен превышать 28 млн рублей. Поэтому

$$(((1,1S + 1)1,21 + 4)1,1 - 5) \cdot 1,01 > 28.$$

После упрощения получаем

$$1,478741 \cdot S > 27,26169,$$

$$S > \frac{27,26169}{1,478741} \approx 18,43.$$

При этом наименьшее возможное $S = 19$.

Ответ. 19 млн рублей.

Задача 4.6.

Первого апреля Андрей Петрович положил 10000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под 21 % годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличивается на 21 %. Через сколько месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей?

Решение.

О вкладах с капитализацией можно прочесть здесь 10. Построим математическую модель. Обозначим сумму вклада $10000 p = S$. Ежемесячную процентную ставку обозначим p . Тогда сумма вклада через год составит:

$$S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = S \cdot 1,21,$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 1,1,$$

$$p = 100 \cdot \left(1,1^{\frac{1}{6}} - 1\right).$$

За k месяцев сумма вклада составит

$$10000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^k = 10000 \cdot 1,1^{\frac{k}{6}}.$$

По условию задачи сумма вклада за k месяцев должна превзойти 11 000 рублей

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k = 1,1^{\frac{k}{6}} > 1,1^1,$$

$$k > 6.$$

Это означает, что через 7 месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей.

Ответ. 7.

Банковский кредит. Аннуитетный платеж

Потребительский кредит (заем) – денежные средства, предоставленные кредитором заемщику на основании кредитного договора, договора займа.

Заемщик – физическое лицо, обратившееся к кредитору с намерением получить потребительский кредит (заем).

Тело кредита - это сама сумма кредита, без учета процентов.

Взяли, например, 100 000 рублей - это тело, на него начисляются проценты.

Аннуитетный способ погашения кредита является более распространенным для большинства пользовательских кредитов. При нем рассчитывается полная стоимость займа помимо одноразовых комиссий. Вся сумма делится на определенный срок кредитования. Этот способ выгодный тем, что не составляет особых хлопот. Заемщик точно знает и помнит сумму ежемесячного платежа. Каждый месяц заемщик вносит на банковский счет одинаковую сумму в течение всего срока действия договора.

Задача 4.7.

Для покупки автомашины Сергей скопил 2780000 рублей, поэтому недостающую сумму он взял в банке в кредит под 25% годовых на 3 года. Выплачивать кредит он должен аннуитетными платежами (заемщик каждый год выплачивает одну и ту же сумму, основная часть аннуитетного платежа – проценты, остальные – долг). Сколько процентов от стоимости машины Сергею не хватало на ее приобретение, если известно, что он переплатил по кредиту 655 000 рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим S – сумма кредита, x – ежегодные выплаты банку. Динамика долга представлена в таблице.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
0				S
1	S	$\frac{5}{4}S$	x	$\frac{5}{4}S - x$
2	$\frac{5}{4}S - x$	$\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4}$	x	$\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x$
3	$\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x$	$\left(\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x\right) \cdot \frac{5}{4}$	x	0

Поскольку через 3 года кредит должен быть погашен полностью, то получаем уравнение

$$\left(\left(\frac{5}{4}S - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x\right) \cdot \frac{5}{4} - x = 0,$$

Упрощая, получим

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 S = 4x \left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1\right),$$
$$125S = 244x,$$

$$x = \frac{125S}{244}.$$

За три года заплатили

$$3x = \frac{375S}{244}.$$

Переплата составила 655 тыс. руб., следовательно

$$3x - S = \frac{375S}{244} - S = 655000.$$

Откуда

$$S = 1220000.$$

Тогда автомашина стоила

$$2780000 + 1220000 = 4000000.$$

Найдем долю кредита в стоимости автомашины:

$$\frac{S}{4000000} = \frac{1220000}{4000000} = 0,305.$$

Ответ. 30,5%.

Задача 4.8.

Для покупки квартиры Алексею не хватало 1209600 рублей, поэтому в январе 2015 года он решил взять в банке кредит под 10% годовых на 2 года.

Условия пользования кредитом таковы:

- раз в год 15 декабря банк начисляет на оставшуюся сумму долга проценты, то есть долг увеличивается на 10%;
- в период с 16 по 31 декабря Алексей обязан перевести в банк некоторый платеж в x рублей.

Чему должен быть равен x , чтобы Алексей выплатил долг равными платежами?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть Алексей взял кредит $S = 1209600$ рублей, обозначим перевод в банк x рублей, $r = 1,1$. Тогда динамика расчетов с банком может быть представлена в таблице.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
0				
1	S	rS	x	$rS - x$
2	$rS - x$	$r(rS - x)$	x	$r(rS - x) - x$

Поскольку после двух лет Алексей гасит кредит полностью, то

$$\begin{aligned} r(rS - x) - x &= 0, \\ r^2S &= x(r + 1), \\ x &= \frac{r^2S}{r + 1} = \frac{1,21 \cdot 1209600}{2,1} = 696960. \end{aligned}$$

Алексей делает два равных платежа по 696960 рублей.

Ответ. 696960 руб.

Банковский кредит. Дифференцированный платеж

Дифференцированный способ погашения кредита предусматривает уменьшение ежемесячного взноса. Сначала клиент платит большие взносы по кредиту, а затем с каждым разом сумма платежа уменьшается.

Задача 4.9.

15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 35 (с февраля 2025 года по декабрь 2027 года включительно) долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 января 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму кредита $S = 900000$; $p = 1,05$; $a = 20$.

Представим динамику счета за 36 месяцев в табличной форме.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
0				
1	S	Sp	$Sp - (S - a)$	$S - a$
2	$S - a$	$(S - a)p$	$(S - a)p - (S - 2a)$	$S - 2a$
3	$S - 2a$	$(S - 2a)p$	$(S - 2a)p - (S - 3a)$	$S - 3a$
4	$S - 3a$	$(S - 3a)p$	$(S - 3a)p - (S - 4a)$	$S - 4a$
5	$S - 4a$	$(S - 4a)p$	$(S - 4a)p - (S - 5a)$	$S - 5a$
...	...	...	...	...
35	$S - 34a$	$(S - 34a)p$	$(S - 34a)p - (S - 35a)$	$S - 35a$
36	$S - 35a$	$(S - 35a)p$	$(S - 35a)p$	0

Тогда суммарные выплаты банку составят

$$36Sp - ap(1 + 2 + 3 + \dots + 35) - 35S + a(1 + 2 + 3 + \dots + 35).$$

По формуле суммы арифметической прогрессии будем иметь

$$36Sp - ap(18 \cdot 35) - 35S + a(18 \cdot 35).$$

Подставляя известные значения получим, что суммарные выплаты составят

$$36 \cdot 900 \cdot 1,05 - 20 \cdot 1,05 \cdot (630) - 35 \cdot 900 + 20 \cdot (630) = 1890000.$$

Ответ. 1,89 млн рублей.

Задача 4.10.

15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тыс. рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $k = 1,03, a = 30000$ руб. Динамика долга представлена в таблице.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку
0			S
1	kS	$kS - (S - a)$	$S - a$
2	$k(S - a)$	$k(S - a) - (S - 2a)$	$S - 2a$
3	$k(S - 2a)$	$k(S - 2a) - (S - 3a)$	$S - 3a$
4	$k(S - 3a)$	$k(S - 3a) - (S - 4a)$	$S - 4a$
5	$k(S - 4a)$	$k(S - 4a) - (S - 5a)$	$S - 5a$
...	...	...	...
20	$k(S - 19a)$	$k(S - 19a) - (S - 20a)$	$S - 20a$
21	$k(S - 20a)$	$k(S - 20a)$	0

По условию задачи, суммарные выплаты банку составили 1604 тыс. руб., тогда

$$21kS - 21S - ka(1 + 2 + 3 + \dots + 20) + a(1 + 2 + 3 + \dots + 21) = 1604000,$$

$$21S \cdot 0,03 - ka \left(\frac{1 + 20}{2} \cdot 20 \right) + a \left(\frac{1 + 21}{2} \cdot 21 \right) = 1604000,$$

Подставляя k и a , получим

$$1,63S = 1793000,$$

$$S = 1100000.$$

Ответ. Планируется взять в кредит 1100000 рублей.

Банковский кредит. Другие схемы платежей

Задача 4.11.

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на R % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июнь предыдущего года;

- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно R , если общая сумма выплат составит 930 тыс. рублей?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму вклада $S = 600, q = 1,15$. Обозначим $r = 1 + \frac{R}{100}$. Представим динамику счета в табличной форме.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
2025				S
2026	S	rS	$\frac{6rS}{6} - \frac{5S}{6}$	$\frac{5S}{6}$
2027	$\frac{5S}{6}$	$\frac{5rS}{6}$	$\frac{5rS}{6} - \frac{4S}{6}$	$\frac{4S}{6}$
2028	$\frac{4S}{6}$	$\frac{4rS}{6}$	$\frac{4rS}{6} - \frac{3S}{6}$	$\frac{3S}{6}$
2029	$\frac{3S}{6}$	$\frac{3qS}{6}$	$\frac{3qS}{6} - \frac{2S}{6}$	$\frac{2S}{6}$
2030	$\frac{2S}{6}$	$\frac{2qS}{6}$	$\frac{2qS}{6} - \frac{S}{6}$	$\frac{S}{6}$
2031	$\frac{S}{6}$	$\frac{qS}{6}$	$\frac{qS}{6}$	0
Всего			930000	

Общая сумма выплат составит

$$\frac{15rS}{6} + Sq - \frac{S}{6}(1 + \dots + 5) = \frac{19rS}{6} + Sq - \frac{5S}{2} = 930000.$$

Подставим в равенство известные числа и решим уравнение.

$$15 \cdot r \cdot 100 + 600 \cdot 1,15 - 5 \cdot 300 = 930,$$

$$1500r = 1740,$$

$$r = 1,16.$$

Тогда искомая процентная ставка в первые годы составит $R = 16\%$.

Ответ. 16.

Задача 4.12.

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июнь предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму кредита $S = 800, p = 1,18; q = 1,16$. Тогда динамика счета может быть представлена в табличной

форме. Красным цветом показаны выплаты после начисления 18%, синим цветом показаны выплаты после начисления 16%.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
2025				S
2026	S	pS	$\frac{10Sp}{10} - \frac{9S}{10}$	$\frac{9S}{10}$
2027	$\frac{9S}{10}$	$\frac{9Sp}{10}$	$\frac{9Sp}{10} - \frac{8S}{10}$	$\frac{8S}{10}$
2028	$\frac{8S}{10}$	$\frac{8Sp}{10}$	$\frac{8Sp}{10} - \frac{7S}{10}$	$\frac{7S}{10}$
2029	$\frac{7S}{10}$	$\frac{7Sp}{10}$	$\frac{7Sp}{10} - \frac{6S}{10}$	$\frac{6S}{10}$
2030	$\frac{6S}{10}$	$\frac{6Sp}{10}$	$\frac{6Sp}{10} - \frac{5S}{10}$	$\frac{5S}{10}$
2031	$\frac{5S}{10}$	$\frac{5Sq}{10}$	$\frac{5Sq}{10} - \frac{4S}{10}$	$\frac{4S}{10}$
2032	$\frac{4S}{10}$	$\frac{4Sq}{10}$	$\frac{4Sq}{10} - \frac{3S}{10}$	$\frac{3S}{10}$
2033	$\frac{3S}{10}$	$\frac{3Sq}{10}$	$\frac{3Sq}{10} - \frac{2S}{10}$	$\frac{2S}{10}$
2034	$\frac{2S}{10}$	$\frac{2Sq}{10}$	$\frac{2Sq}{10} - \frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}$
2035	$\frac{S}{10}$	$\frac{Sq}{10}$	$\frac{Sq}{10}$	0

Суммарная выплата составит

$$4Sp + 1,5Sq - \frac{S}{10}(1 + 2 + \dots + 9) = 4Sp + 1,5Sq - 4,5S =$$

$$S(4p + 1,5q - 4,5) = 800000(4 \cdot 1,18 + 1,5 \cdot 1,16 - 4,5) = 1568000.$$

Ответ. 1568000 рублей.

Задача 4.13.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за 5 лет.

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим $p = 1,2$. Динамика счета представлена в таблице.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
2016				S
2017	S	Sp	$Sp - S = S(1 - p) = 0,2S$	S
2018	S	Sp	$Sp - S = 0,2S$	S
2019	S	Sp	$Sp - S = 0,2S$	S
2020	S	Sp	360	$Sp - 360$
2021	$Sp - 360$	$(Sp - 360)p$	360	0

Поскольку в 2021 году кредит должен быть погашен, то получаем уравнение

$$(Sp - 360)p = 360.$$

Подставляем известное $p = 1,2$

$$(1,2S - 360)1,2 = 360,$$

$$S = 550.$$

Тогда общая сумма выплат

$$0,6S + 720 = 0,6 \cdot 550 + 720 = 1050.$$

Ответ. 1050000 рублей.

Задача 4.14.

В июле 2026 года планируется взять кредит на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 500 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг будет выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита равна 1235,2 тыс. рублей. Какую сумму требуется взять в кредит?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим сумму кредита S тыс.рублей, $p = 1,18$. Динамику долга представим в таблице.

Год	Долг после начисления %	Выплаты банку	Долг после выплаты
2026			S
2027	$1,2S$	500	$1,2S - 500$
2028	$(1,2S - 500) \cdot 1,2$	500	$(1,2S - 500) \cdot 1,2 - 500$
2029	$((1,2S - 500) \cdot 1,2 - 500) \cdot 1,2$	235,2	0

По условию задачи третьим платежом выплатили весь долг, поэтому

$$((1,2S - 500) \cdot 1,2 - 500) \cdot 1,2 = 235,2$$

$$S = 900.$$

Ответ. Требуется взять в кредит сумму 900000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения[8]

Задача 4.15.

Рассчитайте дифференцированный платеж и составьте график выплат по кредиту с указанием суммы процентов и выплачиваемого долга за каждый

период, если сумма кредита равна 500 000 руб. на срок десять лет под процентную ставку 7% годовых, выплаты производятся 1 раз в год – в конце периода (считаем, что выплата тела долга каждый год будет одинаковой).

Задача 4.16.

Рассчитайте дифференцированный платеж и составьте график выплат по кредиту с указанием суммы процентов и выплачиваемого долга за каждый период, если сумма кредита равна 1 725 000 руб. на срок семь лет под процентную ставку 9% годовых, выплаты производятся 2 раза в год – в середине и в конце периода (считаем, что выплата тела долга каждый год будет одинаковой).

Задача 4.17.

Рассчитайте график аннуитетных платежей по кредиту с указанием суммы процентов и выплачиваемого долга за каждый период, если сумма кредита равна 500 000 руб. на срок десять лет под процентную ставку 7% годовых, выплаты производятся 1 раз в год – в конце периода.

Задача 4.18.

Рассчитайте график аннуитетных платежей по кредиту с указанием суммы процентов и выплачиваемого долга за каждый период, если сумма кредита равна 1 725 000 руб. на срок семь лет под процентную ставку 9% годовых, выплаты производятся 2 раз в год – в середине и в конце периода.

Задача 4.19.

Пересветова Аркадия Семеновича в январе 2022 г. повысили на работе, и теперь он является заместителем финансового директора крупной консалтинговой фирмы в центре Москвы. Его заработная плата составляет 300 000 руб. в месяц. Наконец настал тот момент, когда может осуществиться заветная мечта Аркадия – приобрести AudiRS 7 Sportback performance стоимостью 8 595 000 руб. В январе 2021 г. он открыл счет «Сохраняй Онлайн» в Сбербанке на сумму 2 000 000 руб. со ставкой 6,8% годовых с капитализацией. Кроме того, Аркадий готов ежемесячно откладывать половину своей зарплаты на покупку мечты. Рассмотрите несколько вариантов покупки автомобиля и выберите наилучший.

Вариант 1: Аркадий продлевает срок вклада с применением действующих процентных ставок. Дома он откладывает по 150 000 руб. до тех пор, пока не накопит необходимую сумму.

Вариант 2: Аркадий открывает вклад «Пополняй» в Сбербанке по действующим процентным ставкам. Ежемесячно он перечисляет на вклад 150 000 руб. с помощью услуги «Копилка».

Вариант 3: Аркадий использует имеющиеся у него 2 000 000 руб. в качестве первого взноса при покупке автомобиля. Изучите условия кредитования при покупке Audi у официальных дилеров. Рассчитайте сумму ежемесячных платежей по кредиту и сумму переплаты.

Вариант 4: Подумайте, как можно снизить обязательства по кредиту, используя депозитный вклад в банке.

Проверочная работа №1

Вариант 1

Задача 1.

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,
- 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн рублей было взято в банке, если известно, что он был погашен тремя равными платежами (т.е. за 3 года)?

Задача 2.

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом;
- в июле каждого из годов с 2026 по 2030 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле каждого из годов с 2031 по 2035 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года, отличную от суммы, на которую долг уменьшался первые пять лет.

Известно, что в конце 2030 года долг составил 800 тысяч рублей. Найдите начальную величину кредита, если сумма всех выплат по кредиту оказалась равна 2090 тысяч рублей.

Задача 3.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 20-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2073 тысяч рублей?

Вариант 2

Задача 1.

В июле планируется взять кредит на сумму 4 026 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,
- 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью выплачен за 4 года, по сравнению со случаем, если кредит будет полностью выплачен за 2 года?

Задача 2.

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годах долг остаётся равен 3,3 млн руб.;
- платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите разницу между первым и последним платежами.

Задача 3.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

5. Оптимизация процессов

Оптимизация – это процесс нахождения наилучшего решения задачи, определяемого по некоторым заранее установленным критериям.

Всевозможные устройства, процессы и ситуации, применительно к которым предстоит решать задачу оптимизации, называют объектом оптимизации.

Решение любой задачи оптимизации начинают с выявления цели оптимизации, т. е. формулировки требований, предъявляемых к объекту оптимизации. От того, насколько правильно выражены эти требования, может зависеть возможность решения задачи.

В случае, когда достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом ставится цель выбрать наилучший из возможных способов. Однако в различных ситуациях наилучшими могут быть

совершенно разные решения. Все зависит от выбранного или заданного критерия.

Рассмотрим базовую задачу, решение которой сводится к нахождению оптимальных значений.

Задача 5.1.[5]

В прямоугольной комнате площадью 42 м^2 требуется установить плинтусы по всему периметру. Стоимость 1 м плинтуса составляет 280 руб. При каких целых линейных размерах комнаты в метрах затраты на покупку плинтуса будут наименьшими?

Решение.

Построим математическую модель задачи. Плинтус необходимо уложить вдоль всех стен комнаты (логика подсказывает, что дверной проем не следует закрывать плинтусом, но поскольку в условии не указана ширина этого проема, то этим фактом будем пренебрегать). Уложенный плинтус будет принимать форму прямоугольника. Затраты на покупку плинтуса будут наименьшими, если наименьшее значение будет принимать периметр этого прямоугольника. Пусть a, b – стороны прямоугольника. Тогда его периметр $P = 2(a + b)$. Поскольку площадь $S = ab = 42$, то $b = \frac{S}{a} = \frac{42}{a}$. Тогда задача нахождения наименьшего периметра прямоугольника сводится к нахождению наименьшего значения целевой функции

$$P(a) = 2a + \frac{84}{a}$$

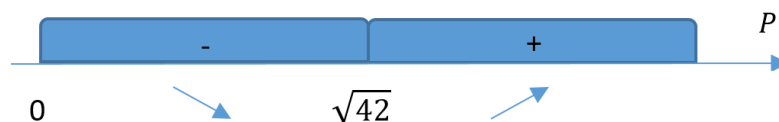
при $a > 0$, поскольку комната может быть сколь угодно большой.

Производная равна

$$P'(a) = 2 - \frac{84}{a^2}.$$

Найдем критические точки целевой функции.

$$P'(a) = 0, \\ a^2 = 42, a = \sqrt{42}.$$



Следовательно при $a = \sqrt{42}$ периметр наименьший. По условию задачи размеры комнаты должны быть целыми, поэтому $a = 6$ или $a = 7$. Тогда $b = \frac{42}{6} = 7$ или $b = 6$.

Ответ. Линейные размеры комнаты 6 и 7.

Задача 5.2.[3]

Иннокентий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате

если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков. За каждый час работы на каждом из заводов Иннокентий платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 станков. Какую наименьшую сумму в миллионах рублей придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение.

Построим математическую модель.

	Количество произведенных станков	Количество человеко-часов	Затраты на зарплату
1 завод	a	$9a^3$	$400 \cdot 9a^3$
2 завод	$b = 20 - a$	b^3	$400 \cdot b^3$
Всего	$a + b = 20$		$400 \cdot 9a^3 + 400 \cdot b^3$

По условию необходимо найти наименьшее значение выражения

$$400 \cdot 9a^3 + 400(20 - a)^3,$$

если $a \in [0; 20], a \in \mathbb{Z}$.

Задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $f(a) = 9a^3 + (20 - a)^3$ на отрезке $[0; 20]$, которую здесь и в дальнейшем будем называть целевой.

Функция $f(a)$ дифференцируема в области определения.

$$\begin{aligned} f'(a) &= 27a^2 - 3(20 - a)^2 = 3(3a - (20 - a))(3a + 20 - a) = \\ &= 16(a - 5)(a + 10). \end{aligned}$$

Очевидно, что, если $a \in [0; 5)$, то $f' < 0$, поэтому f убывает на промежутке $[0; 5)$. Если $a \in (5; 20]$, то $f' > 0$, поэтому f возрастает на промежутке $(5; 20]$. Значит $a = 5$ является точкой минимума и функция f принимает наименьшее значение, это означает, что затраты при $a = 5$ на заработную плату минимальны. Найдём эти затраты.

$$400 \cdot f(5) = 400 \cdot 9 \cdot 125 + 400 \cdot 153 = 450000 + 1350000 = 1\,800\,000.$$

Ответ. 1800000 рублей.

Задача 5.3.[5]

Андрей владеет двумя заводами. Если на заводе суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то они производят t товаров. Заработная плата рабочего за час работы на первом заводе составляет 200 рублей, а на втором 300 рублей. Андрей хочет выделять на заработную плату рабочим в неделю 2,7 млн. рублей и при этом получать наибольшее количество произведенных товаров. Определите, сколько в этом случае должно быть произведено товаров на каждом заводе.

Решение.

Построим математическую модель.

	Произведено деталей	Количество человеко-часов	Выделено на зарплату
1 завод	a	a^2	$200 \cdot a^2$
2 завод	b	b^2	$300 \cdot b^2$
Всего	$a + b$		$200 \cdot a^2 + 300 \cdot b^2$

По условию задачи

$$200 \cdot a^2 + 300 \cdot b^2 = 2700000.$$

Откуда

$$b^2 = 9000 - \frac{2}{3}a^2,$$

$$b = \sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}.$$

Необходимо найти наибольшее значение выражения $a + b$. С учетом последнего равенства задача сводится к нахождению наибольшего значения целевой функции

$$f(a) = a + \sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}$$

при $a \in [0; 10\sqrt{135}]$.

Производная равна

$$f'(a) = 1 - \frac{2a}{3\sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}}$$

Найдем критические точки

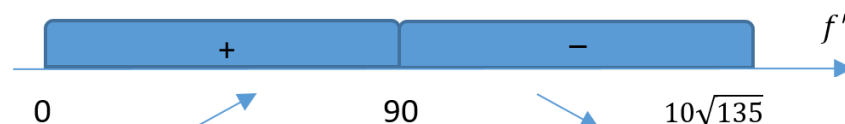
$$f'(a) = 1 - \frac{2a}{3\sqrt{9000 - \frac{2}{3}a^2}} = 0,$$

$$9000 - \frac{2}{3}a^2 = \frac{4}{9}a^2,$$

$$a^2 = 8100,$$

$$a = \pm 90.$$

Только $a = 90 \in [0; 10\sqrt{135}]$.



Наибольшее значение функции $f(a)$ достигается при $a = 90$, тогда

$$b = \sqrt{9000 - \frac{2}{3}90^2} = 60.$$

Наибольшее количество товаров достигается при $a = 90$ (количество товаров, произведенных на первом заводе) и при $b = 60$ (количество товаров, произведенных на втором заводе). Всего будет произведено 150 единиц товара.

Ответ. 90 единиц товара должно быть произведено на первом заводе и 60 единиц товара должно быть произведено на втором заводе.

Задача 5.4.[5]

Часть денег от суммы 400 млн рублей размещена в банке под 12% годовых, а другая часть инвестирована в производство. При этом через год эффективность инвестирования ожидается в размере 250%, то есть вложенная в производство сумма x млн рублей оборачивается в капитал 2,5х млн рублей. После этого отчисляются деньги на издержки производства, которые задаются квадратичной зависимостью $0,0022x^2$ млн рублей. Разность между капиталом и издержками в производстве облагается налогом в 20%.

Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить общую максимальную прибыль от размещения в банк и вложения денег в производство? Сколько млн рублей составит эта прибыль?

Решение.

Построим математическую модель. Обозначим x млн – сумма, вложенная в производство. Тогда в банк будет вложено $400 - x$ млн. Полученные средства через год приведем в таблице:

Банковский вклад, 12% годовых	Производство: 250%	За вычетом налога 20%
$1,12(400 - x)$	$x \cdot 2.5 - 0,0022x^2$	$(x \cdot 2.5 - 0,0022x^2) \cdot 0,8$

Прибыль (доход за вычетом вложений) выражается функцией

$$f(x) = 1,12(400 - x) + (x \cdot 2.5 - 0,0022x^2) \cdot 0,8 - 400 = -0,00176x^2 + 0,88x + 48.$$

$f(x)$ является квадратичной функцией, графиком которой является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшее значение функция достигает в точке вершины параболы. Находим абсциссу вершины параболы.

$$x_0 = \frac{-0,88}{-2 \cdot 0,00176} = 250.$$

$$f(250) = 1,12(400 - 250) + (250 \cdot 2.5 - 0,0022 \cdot 62500) \cdot 0,8 - 400 = 158.$$

Итак, для достижения наибольшей прибыли 158 млн. следует вложить в производство 250 млн. и вложить в банк 150 млн.

Ответ. Наибольшая возможная прибыль 158 млн.

Задача 5.5.[3]

Строительство нового завода стоит 220 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма каждый год будет выпускать продукцию

в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки цена на продукцию $p = 9$ тыс. рублей за единицу. Каждый следующий год цена увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение.

Построим математическую модель. Эта модель уже частично указана нам в условии задачи. Выясним, при каком значении x годовая прибыль фирмы при цене p наибольшая. Математически это означает найти наибольшее значение функции

$$f(x) = px - (0,5x^2 + x + 7) = -0,5x^2 + (p - 1)x - 7.$$

Графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы

$$x_0 = \frac{p - 1}{2 \cdot 0,5} = p - 1.$$

При этом наибольшая годовая прибыль при цене p становится равна

$$p(p - 1) - (0,5(p - 1)^2 + (p - 1) + 7) = 0,5(p - 1)^2 - 7.$$

Рассмотрим динамику прибыли за несколько первых лет.

Год	p	Годовая прибыль $0,5(p - 1)^2 - 7$	Суммарная прибыль
1	9	$0,5 \cdot 64 - 7 = 25$	$25 < 220$
2	10	$0,5 \cdot 81 - 7 = 33,5$	$25 + 33,5 = 58,5 < 220$
3	11	$0,5 \cdot 100 - 7 = 43$	$58,5 + 43 = 101,5 < 220$
4	12	$0,5 \cdot 121 - 7 = 53,5$	$101,5 + 53,5 = 155 < 220$
5	13	$0,5 \cdot 144 - 7 = 65$	$155 + 65 = 220$
6	14	$0,5 \cdot 169 - 7 = 77,5$	

Завод окупится ровно через 5 лет, после этого начнет приносить прибыль.

Ответ. 5 лет.

Задача 5.6.[3]

У фермера есть два поля, каждое площадью 6 га. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га и на втором тоже 410 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором 430 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 рублей за центнер, морковь по цене 3500 рублей за центнер, а свеклу по цене 4000 рублей за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

Решение.

Построим математическую модель. Площади, отводимых под культуры, приведем в таблице

	Картофель, га	Морковь, га	Свекла, га
1 поле	a	b	$6 - a - b$
2 поле	c	d	$6 - c - d$

Тогда урожай каждой культуры на каждом поле принимает вид

	Картофель, га	Морковь, га	Свекла, га
1 поле	$410a$	$370b$	$320(6 - a - b)$
2 поле	$410c$	$430d$	$460(6 - c - d)$

Откуда можно найти прибыль от каждой культуры на каждом поле

	Картофель, га	Морковь, га	Свекла, га
1 поле	$410a \cdot 3000$	$370b \cdot 3500$	$320(6 - a - b) \cdot 4000$
2 поле	$410c \cdot 3000$	$430d \cdot 3500$	$460(6 - c - d) \cdot 4000$

Нахождение оптимального значения целевой функции в данной задаче отличается от предыдущих, поскольку проведем его без использования производной. Прибыль с продажи урожая с обоих полей будет наибольшей, если прибыль с каждого поля будет максимальной.

Прибыль с первого поля в тыс. руб.

$$1230a + 1295b + 1280(6 - a - b) = 7680 - 50a + 15b$$

будет наибольшей, если a достигает наименьшего значения, а b своего наибольшего. Тогда $a = 0, b = 6$. Следовательно, на первом поле выгодно сажать только морковь. При этом максимальная прибыль с 1 поля равна $7680 + 15 \cdot 6 = 7770$ тыс. руб.

Прибыль со второго поля в тыс. руб.

$$1230c + 1505d + 1840(6 - c - d) = 11040 - 610c - 335d$$

будет наибольшей, если c, d принимают наименьшие значения, т.е. $c = d = 0$. Второе поле полностью отводится под свеклу. При этом наибольшая прибыль от второго поля равна 11040 тыс. руб.

Общая максимальная прибыль для фермера составит

$$7770000 + 11040000 = 18810000 \text{ рублей.}$$

Ответ. 18,81 млн.

Задача 5.7.[4]

В первые классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каком должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в 1А классе количество девочек x человек. Тогда структура распределения учащихся по классам представим в таблице:

Класс	Мальчики	Девочки	Доля девочек
1А	$22 - x$	x	$\frac{x}{22}$
1Б	$23 - (25 - x) = x - 2$	$25 - x$	$\frac{25 - x}{23}$
Всего	20	25	$\frac{x}{22} + \frac{25 - x}{23}$

По условию задачи $0 \leq x \leq 22$. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = \frac{x}{22} + \frac{25 - x}{23}$ на отрезке $[0; 22]$.

Преобразуем

$$f(x) = \frac{x}{22} + \frac{25-x}{23} = \frac{x}{22 \cdot 23} + \frac{25}{23}.$$

Поскольку $f(x)$ является линейной, возрастающей функцией, то своё наибольшее значение принимает при $x = 22$. Это будет означать, что для того, чтобы сумма процентов девочек была наибольшей, нужно, чтобы 1А класс состоял только из девочек (22 человека), а в 1Б классе должно быть 20 мальчиков и 3 девочки.

Задача 5.8.[3]

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы в млн. рублей за 1 год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение.

Математическая модель уже частично построена в условии задачи. Выясним, при каком значении x годовая прибыль фирмы при цене p наибольшая. Математически это означает найти наибольшее значение функции

$$f(x) = px - (0,5x^2 + 2x + 6) = -0,5x^2 + (p - 2)x - 6.$$

Графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Находим абсциссу вершины параболы

$$x_0 = \frac{p - 2}{2 \cdot 0,5} = p - 2.$$

При этом наибольшая годовая прибыль при цене p становится равна

$$p(p - 2) - (0,5(p - 2)^2 + 2(p - 2) + 6) = 0,5(p - 2)^2 - 6.$$

За три года наибольшая прибыль составит

$$3 \cdot (0,5(p - 2)^2 - 6) = 78.$$

Решая уравнение

$$\begin{aligned}(p - 2)^2 &= 64, \\ p &= 10.\end{aligned}$$

При $p = 10$ строительство завода окупится за 3 года?

Ответ. 10.

Задача 5.9.[4]

Производство x тысяч единиц продукции обходится в $q = 3x^2 + x + 6$ миллионов рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через 11 лет суммарная прибыль может составить не менее 66 млн рублей при некотором значении x ?

Решение.

Построим математическую модель. Выразим прибыль от продаж за 1 год:

$$y(x) = px - q = px - 3x^2 - x - 6 = -3x^2 + (p - 1)x - 6.$$

В поиске экстремума обойдемся без дифференцирования. Графиком функции $y = y(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Абсцисса вершины параболы

$$x_0 = \frac{p - 1}{6}.$$

Значение функции $y(x)$ в ней даст максимальную годовую прибыль

$$y(x) = -3 \left(\frac{p - 1}{6} \right)^2 + (p - 1) \frac{p - 1}{6} - 6 = \frac{(p - 1)^2}{12} - 6.$$

Поскольку за 11 лет прибыль должна составить не менее 66 млн рублей, то годовая максимальная прибыль должна быть не менее 6 млн рублей.

$$\begin{aligned} \frac{(p - 1)^2}{12} - 6 &\geq 6, \\ (p - 1)^2 &\geq 144, \\ \begin{cases} p \geq 13, \\ p \leq -11. \end{cases} \end{aligned}$$

По смыслу задачи p положительное. Значит $p \geq 13$.

Наименьшее p , при котором через 11 лет суммарная прибыль может составить не менее 66 млн рублей равно 13.

Ответ. 13.

Задача 5.10.[5]

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на 25%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть в годы $1, 2, 3, \dots, k$ пенсионный фонд владеет ценными бумагами, в годы $k + 1, k + 2, \dots, k + p = 20$ средства, вырученные за ценные бумаги, держит на счету в банке ($20 - k$ лет деньги лежат в банке). Тогда накопленные за 20 лет средства пенсионного фонда равны:

$$f(k) = k^2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{20-k}.$$

Задача сводится к определению целого $k \in [1; 20]$, при котором функция $f(k)$ принимает наибольшее значение. Найдем производную

$$f'(k) = 2k \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{20-k} - 2k^2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{20-k} \ln \frac{5}{4}$$

и критические точки

$$2k \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{20-k} - 2k^2 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{20-k} \ln \frac{5}{4} = 0,$$

$$\begin{cases} k = 0, \\ 2 - k \cdot \ln \frac{5}{4} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, условию удовлетворяет только значение $k = \frac{2}{\ln \frac{5}{4}}$. Проведем оценку значения $\frac{2}{\ln \frac{5}{4}}$, для этого представим его в виде $2 \cdot \log_{\frac{5}{4}} e$. Можно убедиться, что

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{4} \right)^4 &\leq 2 \cdot \log_{\frac{5}{4}} e \leq 2 \cdot \log_{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{4} \right)^5, \\ 8 &\leq 2 \cdot \log_{\frac{5}{4}} e \leq 10. \end{aligned}$$

Тогда $k = 9$.

В конце девятого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей.

Ответ. 9.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.11.[3]

У фермера есть два комбайна. Оба комбайна используются для уборки зерновых, но второй комбайн более современный. В результате, если первый комбайн работает t^2 часов, то за то время он собирает $8t$ тонн зерновых; если второй комбайн работает t^2 часов, то за то время он собирает $15t$ тонн зерновых. За каждый час работы фермер платит каждому комбайнеру 200 рублей. Фермер готов выделять 20000 рублей на оплату труда комбайнеров. Какое наибольшее количество тонн зерновых можно собрать за эти деньги с помощью двух комбайнов?

Задача 5.12.[3]

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 26 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах.

Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ денежных единиц. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ денежных единиц. Дополнительные суточные накладные расходы, то есть транспорт, питание и тому подобное, обходятся в 4 денежных единицы в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 денежных единицы при строительстве второго дома.

Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание, то есть суточная зарплата и суточные накладные расходы, оказались наименьшими? Сколько денежных единиц в сумме при таком распределении составят все суточные затраты, то есть зарплата и накладные расходы?

Задача 5.13.[5]

На трех заводах выпускают одинаковую продукцию. Известно, что если на заводе в течение месяца будут трудиться t рабочих, то первый завод выпустит $3t^2$ единиц продукции, а второй и третий по t^2 единиц. Заработная плата на первом заводе для одного рабочего составляет 40 тыс. рублей в месяц, на втором заводе – 20 тыс. рублей в месяц, на третьем – 30 тыс. рублей в месяц. Также известно, что на втором заводе рабочих вдвое меньше, чем на первом, а суммарное число рабочих на трех заводах равно 40. Определите, какое наибольшее количество единиц продукции может быть выпущено на заводах за месяц, учитывая, что общий бюджет на зарплаты составил не более 1400000 рублей.

Задача 5.14. [4]

В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у.е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у.е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Задача 5.15. [5]

Компания изготавливает и продает изделия. Если одно изделие стоит 2000 рублей, то реализуется 1000 штук изделий. При снижении средней цены одного изделия на 50 рублей объемы реализации возрастают на 50 штук. При какой цене фирма получит максимальный доход и каково его значение?

Задача 5.16. [4]

Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. единиц продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2 + 5x$ млн рублей в год. Кроме того, планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x + 24$ млн рублей в год. После продажи продукции (x тыс. единиц) по цене p тыс. рублей (где p – целое число) за единицу ежегодная прибыль завода (в млн рублей) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 6 лет, если расходы по его строительству оцениваются в размере 150 млн рублей?

Проверочная работа №2

Вариант 1

Задача 1.

Строительство нового завода стоит 220 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продавать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рулей) за один год будет

составлять $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год, после запуска завода, продукцию запланировали продавать по $p = 9$ тыс. рублей за единицу, а каждый следующий год цену будут повышать на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Задача 2.

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Задача 3.

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн руб.) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб.?

Вариант 2

Задача 1.

Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Задача 2.

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят

$3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Задача 3.

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

6. Альтернативные издержки

Множественность экономических целей при ограниченности ресурсов ставит проблему экономического выбора наилучшего из альтернативных вариантов их использования, при котором достигается максимальное удовлетворение потребностей при данных затратах.

Ценность наилучшего из альтернативных вариантов, от которых пришлось отказаться при компромиссном выборе называется *альтернативной стоимостью* (издержками) (блага, ресурса, проекта и п.). Альтернативная стоимость часто характеризуется как ценность упущенных возможностей: стоимость одного блага, выраженная в некотором количестве другого блага, от которого пришлось отказаться для получения первого блага.

Издержки одного блага, выраженные в другом благе, которым пришлось пренебречь (пожертвовать), называются *альтернативными издержками*, *издержками неиспользованных возможностей* или *вмененными издержками*.

В реальной действительности люди всегда сталкиваются с альтернативными издержками. Производство одного продукта означает отказ от другого. Рациональный человек должен подсчитать не только будущие затраты, но и издержки неиспользованных производственных возможностей, чтобы сделать оптимальный экономический выбор.

Предположим, что инвестор делает выбор между четырьмя вариантами размещения капитала. Первый вариант принесет прибыль в размере 25%. Второй принесет прибыль в размере 20%, третий – в размере 15%, четвертый – 13%. При этом, если все прочие условия осуществления проектов (риски, сроки, ликвидность и т. п.) считаются равными, то очевидно, что первый проект будет самым выгодным и его выберет инвестор. Его альтернативной стоимостью будет величина ценности следующего по выгодности проекта – проекта № 2 (в данном случае это прибыль, которую он мог бы принести). Этот простейший пример отражает правило принятия экономических

решений. Они принимаются, когда дополнительные (предельные) выгоды должны быть не меньше дополнительных (предельных) издержек:

$$MB > MC,$$

где MB предельные выгоды, MC предельные издержки.

Задачи этого и следующих двух разделов рассмотрим из пособия [6].

Задача 6.1.

Предприниматель Андрей Иванов живет в г. Челябинске, однако в связи с отсутствием прямых рейсов летит в командировку в г. Баку из аэропорта Кольцово (г.Екатеринбург). Такси до аэропорта стоит 3500 рублей в один конец. Предприниматель может добраться до аэропорта на своем автомобиле и оставить его на платной парковке в аэропорту. Расходы на бензин (туда-обратно) составляют 1000 рублей, стоимость платной парковки 300 руб./сутки. Определите, при каком количестве дней командировки предпринимателю Иванову выгодно поехать в аэропорт на такси?

Решение.

Построим математическую модель. Пусть x количество дней командировки.

Издержки	На своём автомобиле	На такси
Расходы на такси	0	$3500 \cdot 2 = 7000$
Расходы на бензин	1000	0
Расходы на парковку, в сутки	$300 \cdot x$	0
Всего	$300 \cdot x + 1000$	7000

Сравнивая издержки разных способов добраться до аэропорта, получим неравенство

$$300 \cdot x + 1000 \geq 7000,$$

$$x \geq 20.$$

Таким образом, если командировка дольше, чем 20 дней, выгодно ехать в аэропорт на такси.

Задача 6.2.

Андрей живет в Чебаркуле, а работает в Челябинске. Он ездит на работу на автобусе, который идет 1 час при цене билета 30 руб. Определите:

1. При каком уровне почасовой оплаты труда ему будет экономически выгоднее ездить на электричке, которая идет 1,5 часа при цене билета 18 руб.?
2. При какой почасовой зарплате он станет ездить на такси за 200 руб., если на такси он может добраться до Челябинска за полчаса?

Решение.

Вид транспорта	Время, час.	Цена билета, руб.
Электричка	1,5	18
Автобус	1	30
Такси	0,5	200

1. Экономия денежных средств при поездке на электричке составляет 12 рублей, при этом потеря времени составит 0,5 часа. На электричке будет

экономически выгоднее ездить при уровне почасовой оплаты меньше 24 руб./час.

2. Экономия времени при поездке на такси составит 0,5 часа, при этом денежные затраты возрастут на 170 рублей. Ездить на работу на такси будет целесообразно в случае, если почасовая зарплата превышает 340 руб./час.

Задача 6.3.

Для закупки подарков для проведения новогодней елки в некой фирме тратится 1 час, при денежных затратах на каждый подарок 150 рублей. Однако если времени затратить на 2 часа больше денежные затраты можно сократить до 140 рублей. При этом сотрудник зарабатывает для фирмы 120 рублей в час. Определите, при каком количестве закупаемых подарков рационально затратить на поиск больше времени.

Решение.

	Время, час.	Затраты, руб.
Вариант 1	1	150
Вариант 2	3	140

Потеря времени при варианте 2 составляет $\Delta t = 3 - 1 = 2$ часа. Экономия денежных средств при варианте 2 составляет $\Delta P = 150 - 140 = 10$ рублей с 1 подарка. За $\Delta t = 2$ часа зарплата сотрудника составит 240.

Таким образом, тратить на поиск подарков больше времени рационально при закупке более 24 подарков.

Задача 6.4.

Отец, мать, дочь и сын приехали на дачу. Им предстоит собрать малину и натаскать воды в баню. Поработать на участке они могут только 3 часа. Отец собирает в час 8 стаканов малины, мать – 15 стаканов, дочь – 25 стаканов, сын – 12 стаканов. Отец за час может принести 20 ведер воды, мать – 15 ведер, дочь – 5 ведер, сын – 20 ведер. Всего семье необходимо принести 100 ведер воды. Как семье распределить работу, чтобы при этом собрать наибольшее количество малины? Сколько малины будет собрано?

Решение.

Составим математическую модель. Каждый член семьи с разной эффективностью собирает малину и носит воду. Подсчитаем её.

	Малина, стакан/час	Вода, ведро/час	Альтернативные издержки на 1 стакан малины	Эффективность сбора малины среди членов семьи	Альтернативные издержки на 1 ведро воды	Эффективность носки ведер среди членов семьи
Отец	8	20	2,5	IV	0,4	I
Мать	15	15	1	II	1	III
Дочь	25	5	0,2	I	5	IV
Сын	12	20	1,67	III	0,6	II

Исходя из полученных данных прежде следует поручить приносить воду отцу, который за 3 часа принесет 60 ведер, оставшиеся 40 принесет сын, как следующий по эффективности. Эти 40 ведер он принесет за 2 часа, значит оставшийся 1 час он будет собирать малину. Мать и дочь все три часа будут собирать только малину. При этом стаканов малины будет собрано

$$3 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 12 = 132.$$

Задачи для самостоятельного решения [8]

Задача 6.5.

После окончания бакалавриата Иванов планирует поступать на магистерскую программу «Корпоративный юрист». Продолжительность обучения составляет два года, форма обучения – очная, стоимость обучения в случае, если он не поступит на бюджет, составляет 400 тыс. руб. в год. Традиционно учеба начинается с сентября и заканчивается в июне – 10 месяцев. Совокупные затраты на учебную литературу, транспорт, питание и др. составляют около 22 тыс. руб. Если Иванов поступит в магистратуру, он не сможет в месяцы учебы работать в юридической фирме. Стартовые зарплаты юристов в области корпоративного права составляют 37,5 тыс.руб. Рассчитайте экономические и альтернативные издержки (упущенную выгоду) его выбора.

Задача 6.6.

Владелец мануфактурного производства имеет два завода: 1 завод в Суздале и 1 завод в Гусь-Хрустальном, производящие стеклянные и фарфоровые изделия. Первый завод может произвести 40 единиц фарфора или 100 единиц стекла в день, второй завод – 100 единиц фарфора или 200 единиц стекла. Постройте кривую производственных возможностей мануфактуры и определите, какой завод обладает абсолютным и сравнительным преимуществом в производстве стекла и фарфора.

Задача 6.7.

Студент естественного факультета МГУ на летних каникулах имеет возможность заняться подработкой: 1) отправиться в экспедицию в Крым и заработать 10 тыс. руб., 2) работать лаборантом на кафедре с окладом 8 тыс. руб. Однако он не выбрал ни один из предложенных вариантов и решил отправиться с друзьями на кемпинг в Подмосковье, на что пришлось потратить 5 тыс. руб. Рассчитайте экономические и альтернативные издержки его выбора.

Задача 6.8.

У вас имеется три часа свободного от учебы времени в день, и вы решаете, чем заняться: 1) можно обучать друга иностранному языку, за это он готов вас угощать обедом в студенческой столовой, 2) можно работать рекламным агентом в социальных сетях с окладом 300 руб. в час. Вместо этого вы решили пройти бесплатный онлайн-курс по основам инвестирования на фондовом рынке (длительность курса 32 часа). Рассчитайте альтернативные издержки вашего выбора.

Задача 6.9.

Собственник трехкомнатной квартиры в центре столицы проживает один и оплачивает коммунальные расходы в размере 15 тыс. руб. в месяц. Стоимость аренды аналогичных квартир составляет порядка 90 тыс. руб. в месяц. Рассчитайте экономические издержки собственника.

Задача 6.10.

Магазин предлагает приобрести 10%-ную скидку на месяц за 490 руб. Скидка распространяется почти на все категории товаров, за исключением трех, затраты на которые совокупно составляют у вас 5 тыс. руб. ежемесячно. В среднем вы совершаете покупки в данном магазине на сумму 20 тыс. руб. в месяц. Приобретете ли вы скидку? На какую минимальную сумму вам необходимо совершить покупки в месяц при сохранении текущего уровня расходов на три категории товаров, не участвующих в акции?

Задача 6.11.

В рамках программы лояльности банка предлагается выбрать одну из категорий расходов по дебетовой карте, на которые будут начисляться повышенные бонусы: 1% от суммы покупок в категории «Супермаркеты» или 5% – в категории «Транспорт». Какой вариант более предпочтителен, если расходы на супермаркеты составляют в среднем 35 тыс. руб. в месяц, а расходы на транспорт – 6 тыс. руб. в месяц?

Задача 6.12.

Саша приобрела абонемент на 5 занятий с инструктором в тренажерном зале за 10 тыс. руб. Занятия проходят строго по расписанию, пропуск занятия не предполагает возврата денег. В один из дней ей предложили подработку за 1500 руб., для чего ей придется пропустить занятие в зале. С точки зрения рационального выбора должна ли она согласиться на подработку?

Задача 6.13.

Паша отправился в книжный магазин, чтобы приобрести учебник по экономике, стоимость учебника 1200 руб. Пока он стоял в очереди в кассу, один покупатель подсказал ему, что в другом магазине сейчас проходит распродажа и этот же учебник можно купить там всего за 600 руб. До другого магазина добираться 20 минут на такси, стоимость такси 400 руб. (общественным транспортом дешевле, но дольше, а Паша опаздывал на семинар). Если Паша рациональный потребитель, отправится ли он за более дешевым учебником? Каким было бы его решение, если бы он приобретал не учебник, а смартфон стоимостью 18 тыс. руб., а в другом магазине его предлагалось купить на 500 руб. дешевле?

Задача 6.14.

Бабушка Марта выращивает пионы на даче с целью их продажи. Свои сбережения она вкладывает в покупку удобрений, что позволяет увеличить урожай цветов вдвое. Соседка просит бабушку Марту одолжить ей 1 тыс. руб. Сколько она должна заплатить в виде процентов для покрытия альтернативных издержек предоставления займа, если цена удобрений и цветов на рынке постоянна?

7. Кривая производственных возможностей

Производственные возможности общества могут быть использованы по разным, часто альтернативным, назначениям. Наглядно это можно представить с помощью кривой производственных возможностей.

Кривая производственных возможностей – линия, каждая точка на которой представляет максимальный объем производства двух продуктов, при полном использовании экономических ресурсов.

Модель кривой производственных возможностей общества основывается на следующих допущениях:

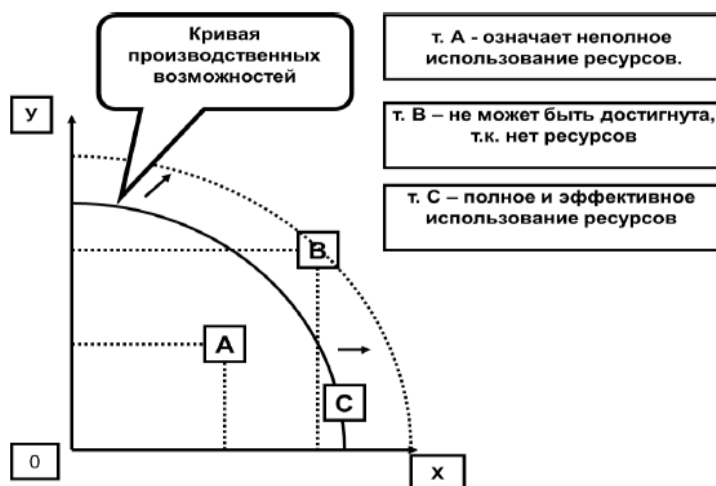
1. Предполагается, что в обществе производится только 2 продукта. Конечно, это сильное упрощение, т. к. в любом обществе производится множество товаров и услуг. Но без этого упрощения мы не сможем построить кривую производственных возможностей в двухмерном пространстве на плоскости. Кроме того, данное допущение имеет определенный смысл и с точки зрения реальной экономики, потому что все множество производимых благ можно разделить на два класса: а) товары и услуги производственного назначения и б) потребительские товары и услуги.

2. Предполагается, что данные продукты производятся в условиях полной занятости ресурсов. Это значит, что рабочие не должны вынужденно оказываться без работы; пахотные земли и капитальное оборудование также не должны простаивать. Только при соблюдении данной предпосылки производство в обществе достигнет границы производственных возможностей.

3. Технологии и количество используемых ресурсов предполагаются неизменными на момент построения кривой производственных возможностей. Эта предпосылка необходима для того, чтобы зафиксировать кривую, так как при изменении технологий или количества ресурсов кривая начнет сдвигаться (см. рис.)

Нисходящий характер КПВ объясняется тем, что экономика работает в условиях ограниченности и полной занятости ресурсов. Следовательно, если мы хотим увеличить производство одного продукта, то вынуждены сокращать выпуск другого. То есть существует обратная зависимость между двумя переменными: увеличение производства товара X, приводит к уменьшению производства товара Y.

Кривая производственных возможностей обычно имеет выпуклую форму (вогнута к началу координат). Эта выпуклость объясняется действием закона возрастающих альтернативных затрат: «В условиях полной занятости ресурсов при производстве каждой последующей дополнительной единицы одного продукта общество вынуждено жертвовать все большим и большим количеством другого продукта.



Одной из причин действия закона возрастающих альтернативных затрат является отсутствие абсолютной взаимозаменяемости экономических ресурсов при использовании их в различных отраслях производства. Это говорит о том, что одни и те же экономические ресурсы не могут быть одинаково эффективно использованы, например, в сельском хозяйстве и ракетостроении.

Это означает, что, изменяя структуру производства, например, в пользу производства товара X, мы будем в большей мере использовать сравнительно малоэффективные для этого ресурсы. Поэтому каждая дополнительная единица товара X требует все большего сокращения производства товара Y (и наоборот). Кривая производственных возможностей исторична, она отражает достигнутый уровень развития технологии и степень использования имеющихся ресурсов. Если увеличиваются ресурсы или улучшается технология, кривая производственных возможностей сдвигается вверх и вправо.

Задача 7.1.

В строительной бригаде работают плиточник, штукатур-маляр, разнорабочий и прораб. Известно, что плиточник выкладывает плитку (1 кв. м) за 1 час, а наклеить обои (1 кв. м) может за 2 часа, штукатур маляр может положить 1 кв. м плитки за 2,5 часа, а наклеить обои (1 кв. м) за 0,5 часа, разнорабочий выкладывает плитку (1 кв. м) за 2 часа, а наклеить обои (1 кв. м) может за 2,5 часа, прораб может положить 1 кв. м. плитки за 4 часа, а наклеить обои (1 кв. м) за 2 часа. Строительная бригада делает ремонт в стандартных комнатах в Доме отдыха. Площадь комнаты по полу (для укладки плитки) составляет 15 кв. м, площадь стен (для наклейки обоев) 25 кв. м. Требуется построить кривую производственных возможностей строительной бригады в рамках 5 дневной рабочей недели (рабочий день 8 часов) и определить, сколько комнат можно полностью отремонтировать за указанное время.

Решение.

Построим математическую модель.

1. Определим, какое количество плитки (кв. м) и обоев (кв. м) могут произвести работники за рабочую неделю (5 дней $\times$ 8 часов = 40 часов).

2. Определим альтернативные издержки на укладку 1 кв. м плитки и альтернативные издержки на 1 кв. м обоев. Оценим эффективность членов строительной бригады.

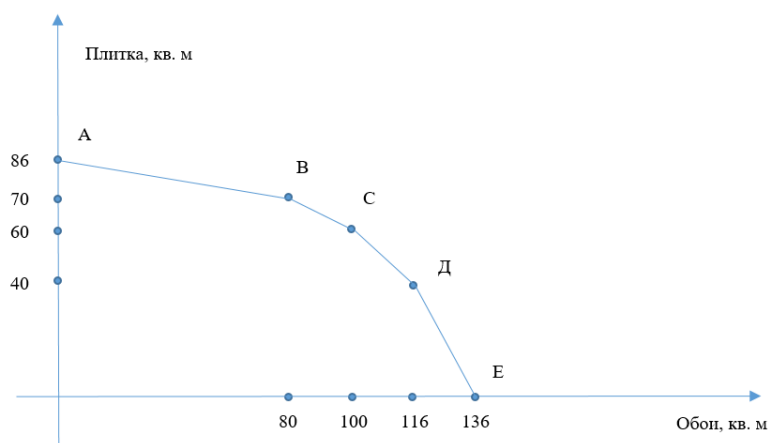
Результаты представлены в таблице:

	Плитка, кв.м/час	Плитка, кв.м	Обои, кв. м/час	Обои, кв. м	Альтернативные издержки на 1 кв.м плитки	Эффективность укладки плитки среди членов бригады	Альтернативные издержки на 1 кв.м обоев	Эффективность наклейки обоев среди членов бригады
Плиточник	$\frac{1}{1} = 1$	40	$\frac{1}{2} = 0,5$	20	0,5	I	2	IV
Штукатур-маляр	$\frac{1}{2,5} = 0,4$	16	$\frac{1}{0,5} = 2$	80	5	IV	0,2	I
Разнорабочий	$\frac{1}{2} = 0,5$	20	$\frac{1}{2,5} = 0,4$	16	0,8	II	1,25	III
Прораб	$\frac{1}{4} = 0,25$	10	$\frac{1}{2} = 0,5$	20	2	III	0,5	II
Всего		86		136				

Привлекая работников по степени их эффективности определим объемы выполняемых работ

	Плитка, кв.м	Обои, кв. м
Точка Е –все клеят обои	0	136
Точка Д –плиточник кладет плитку, все остальные клеят обои	40	116
Точка С –плиточник и разнорабочий кладут плитку, все остальные клеят обои	60	100
Точка В –плиточник, разнорабочий и прораб кладут плитку, штукатур-маляр клеит обои	70	80
Точка А –все кладут плитку	86	0

Координатами точек, определяющих кривую производственных возможностей, являются значения объемов выложенной плитки (ордината) и поклеенных обоев (абсцисса).



Определим максимальное количество комнат, которое можно полностью отремонтировать за указанное время, по расположению соответствующей точки относительно кривой производственных возможностей

	Плитка, кв.м	Обои, кв. м	Расположение точки
1 комната	15	25	внутри кривой
2 комнаты	30	50	внутри кривой
3 комнаты	45	75	внутри кривой
4 комнаты	60	100	на кривой
5 комнат	75	125	за пределами кривой

Таким образом, за 5 дневную рабочую неделю можно полностью отремонтировать 4 комнаты.

Задача 7.2.

Допустим в экономике действуют пять хозяйственных агентов и производятся товара А и В. Производственные возможности хозяйственных агентов различны. Первый в течение дня может произвести 8А или 4В или любую комбинацию между ними. Второй 3А или 3В, либо также любую комбинацию между этими величинами. Третий, соответственно, 1А или 2В. Четвертый 2А или 5В, пятый 10А или 6В. Определите:

1. Кто самый эффективный производитель товара А в этой упрощенной экономике?
2. Кому следует поручить производство товара А, если для удовлетворения потребностей общества требуется одна единица этого товара и максимально возможное количество товара В?
3. Сколько единиц товара В будет при этом произведено?

Решение.

Построим математическую модель.

1. Определим альтернативные издержки на производство единицы каждого товара. Оценим эффективность каждого агента при производстве каждого товара.

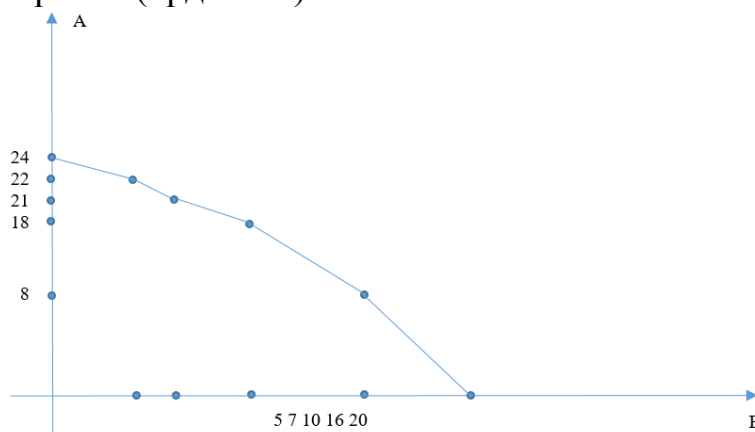
Результаты представлены в таблице:

Агент	Товар А	Товар В	Альтернативные издержки на единицу товара А	Эффективность при производстве товара А	Альтернативные издержки на единицу товара В	Эффективность при производстве товара В
1	8	4	0,5	I	2	V
2	3	3	1	III	1	III
3	1	2	2	IV	0,5	II
4	2	5	2,5	V	0,4	I
5	10	6	0,6	II	1,67	IV
Всего	24	20				

Определим координаты точек кривой производственных возможностей с учётом эффективности агентов при производстве товаров

	Товар А	Товар В
Все агенты производят товар В	0	20
1 агент производит товар А, остальные – товар В	8	16
1, 5 агенты производят товар А, остальные – товар В	18	10
1, 5, 2 агенты производят товар А, остальные – товар В	21	7
1, 5, 2, 3 агенты производят товар А, 4 агент – товар В	22	5
Все агенты производят товар А	24	0

Координатами точек, определяющих кривую производственных возможностей, являются значения объемов производства товаров В (абсцисса) и товаров А (ордината).



Самым эффективным производителем товара А в этой упрощенной экономике агент № 1, поэтому ему следует поручить производство товара А, при этом, если он произведет 1 единицу товара А, то товара В будет произведено $20 - 0,5 = 19,5$ единиц.

Задачи для самостоятельного решения

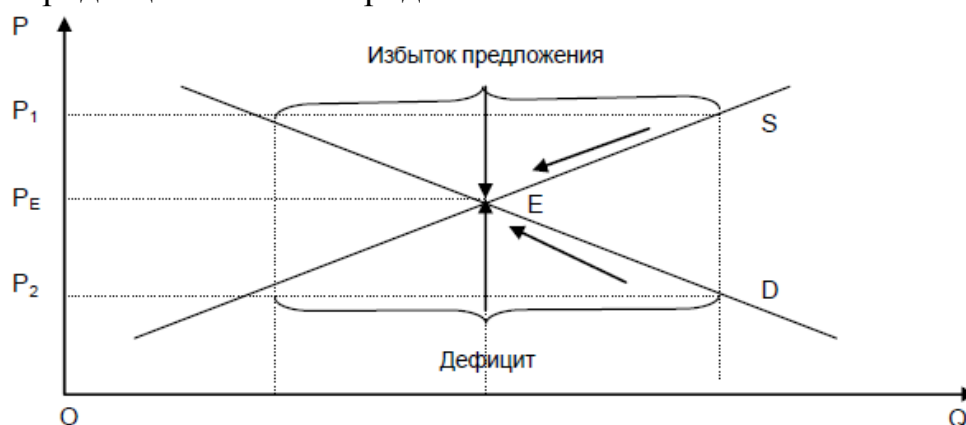
Задача 7.3.

Ольга распределяет свое время между приготовлением тортов и пошивом игрушек на продажу. Она обладает большим опытом в кулинарии и может за

рабочий день испечь 6 тортов, в то время как на изготовление такого же количества игрушек у нее уйдет в два раза больше времени, однако шитье приносит ей удовольствие, поэтому она не готова от него отказаться. Рыночная цена и издержки одного торта и одной игрушки, изготовленных Ольгой, примерно одинаковые. Постройте кривую производственных возможностей (КПВ) Ольги, исходя из того, что она работает полный рабочий день (8 часов).

8. Спрос и предложение. Рыночное равновесие

Установление равновесной цены происходит на конкурентном рынке под влиянием общих тенденций и специфических особенностей как спроса, так и предложения. На рис. 3 показаны в наиболее общем виде динамические процессы, которые происходят в сфере движения товаров и цен. Равновесная рыночная цена – это цена, уравнивающая спрос и предложение в результате действия конкурентных сил. При цене равновесия по каждому данному товару нет ни излишка, ни дефицита. Она устанавливается в результате уравнивания спроса и предложения как денежный эквивалент строго определенного количества товара. Спрос и предложение уравниваются под влиянием конкурентной среды рынка, вследствие чего цена и количество товара, продаваемое по этой цене, выступают как результат равновесия спроса и предложения. При прочих равных условиях цена равновесия соответствует тому количеству, которое покупатели хотят купить, а продавцы согласны продать.



Точка пересечения кривых спроса (D) и предложения (S) точка E — это точка равновесия спроса и предложения. Параметрами рыночного равновесия признаются такие параметры, при которых:

$$P_E = P_S = P_D; Q_E = Q_S = Q_D.$$

Задача 8.1.

Заполните пропущенные ячейки в таблице. Ответ поясните

Цена	Спрос	Предложение	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
40			80			800

	80				30	1800
		50	5			5000
120				30	40	

Решение.

Исходя из определений терминов, пользуем формулы:

- 1) дефицит = спрос – предложение, если спрос > предложения;
- 2) избыток = предложение – спрос, если предложение > спроса;
- 3) объем продаж = $\min\{\text{спрос, предложение}\}$;
- 4) выручка = цена × объем продаж.

В результате получим

Цена	Спрос	Предложение	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
40	100	20	80	–	20	800
60	80	30	50	–	30	1800
100	55	50	5	–	50	5000
120	40	70	–	30	40	4800

Задача 8.2.

Из города Коркино в соседний город Челябинск можно добраться на автобусе. В городе Коркино спрос на школьные тетради первоначально описывался выражением $Q_{DK} = 150 - 7P$, а предложение тетрадей выражением $Q_{СК} = 5P - 18$. В Челябинске спрос на школьные тетради первоначально описывался выражением $Q_{ДЧ} = 185 - 10P$, а предложение тетрадей выражением $Q_{СЧ} = 10P - 35$. (Q количество школьных тетрадей в штуках, P цена в рублях). Затем в обоих городах был введен налог на продажи, выплачиваемый продавцами: в городе Коркино по ставке 5%, а в городе Челябинске поставке 2%.

Определите:

- 1) максимальную цену билета на автобус, при которой покупку 10 школьных тетрадей выгоднее производить не в своем городе, а в соседнем до введения налога;
- 2) максимальную цену билета на автобус, при которой покупку 10 школьных тетрадей выгоднее производить не в своем городе, а в соседнем после введения налога.

Предполагается, что другими затратами на поездку, кроме стоимости билета, можно пренебречь.

Решение.

1. Приравняв Q_{DK} и $Q_{СК}$, мы получим равновесную цену на школьную тетрадь в городе Коркино до введения налога:

$$150 - 7P = 5P - 18,$$

$$12P = 168,$$

$$P = 14.$$

Аналогично, приравняв $Q_{ДЧ}$ и $Q_{СЧ}$, мы получим равновесную цену на школьную тетрадь в Челябинске до введения налога:

$$180 - 10P = 10P - 35,$$

$$20P = 220,$$

$$P = 11.$$

Следовательно, стоимость 10 школьных тетрадей до введения налога составляла 140 рублей в городе Коркино и 110 рублей в городе Челябинске. Поэтому при цене билета на автобус менее 30 рублей ($140 - 110 = 30$) жителям города Коркино было выгоднее купить 10 школьных тетрадей не в своем городе, а в городе Челябинске.

2. После введения налога предложение школьных тетрадей в городе Коркино будет описываться выражением:

$$Q'_{ск} = 5(P - 0,05P) - 18 = 4,75P - 18.$$

Приравняв это новое выражение и прежнее выражение для кривой спроса на школьные тетради в городе Коркино (поскольку спрос остался неизменным), мы получим значение новой равновесной цены в городе Коркино:

$$150 - 7P = 4,75P - 18,$$

$$11,75P = 168,$$

$$P = 14,3.$$

Аналогично после введения налога предложение школьных тетрадей в городе Челябинске будет описываться выражением:

$$Q'_{сч} = 10(P - 0,02P) - 35 = 9,8P - 35.$$

Приравняв это новое выражение и прежнее выражение для кривой спроса на школьные тетради в городе Челябинске, мы получим значение новой равновесной цены в городе Челябинске:

$$185 - 10P = 9,8P - 35,$$

$$19,8P = 220,$$

$$P = 11,11.$$

Следовательно, стоимость 10 школьных тетрадей после введения налога составляла 143 рубля в городе Коркино и 111,10 рубля в городе Челябинске. Поэтому при цене билета на автобус менее 31,9 рубля ($143 - 111,1 = 31,9$) жителям города Коркино было выгоднее купить 10 школьных тетрадей не в своем городе, а в городе Челябинске.

Таким образом

1. До введения налога жителям города Коркино было выгоднее купить 10 школьных тетрадей в городе Челябинске при цене билета на автобус ниже 30 рублей.

2. После введения налога жителям города Коркино стало выгоднее купить 10 школьных тетрадей в городе Челябинске при цене билета на автобус ниже 31,9 рубля.

Задача 8.3.

На рынке спичечных коробков кривая спроса задана выражением: $QD = 3600 - 400P$, а кривая предложения: $QS = 1975 + 250P$, где QD и QS — объемы спроса и предложения спичечных коробков (в шт.), P — цена одного коробка спичек (в руб.).

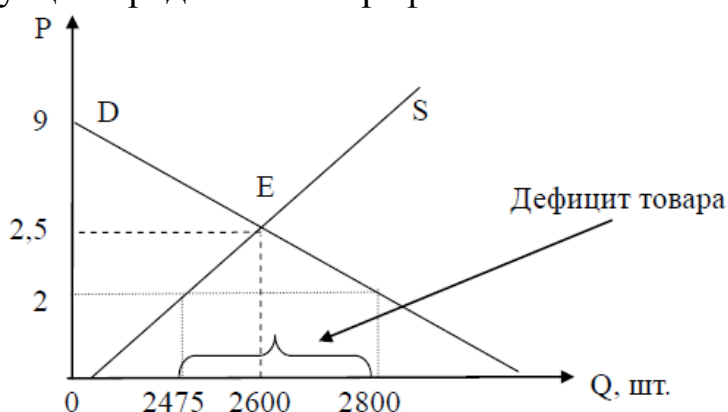
1. Постройте графики спроса и предложения, определите равновесные цену и количество на рынке спичечных коробков.
2. Опишите ситуацию, которая возникнет, если на рынке будет введена фиксированная цена 2 рубля.

Решение.

1. Определим параметры равновесия на рынке, исходя из заданных функций спроса и предложения:

$$\begin{aligned} QD &= QS, \\ 3600 - 400P &= 1975 + 250P, \\ 650P &= 1625, \\ PE &= 2,5 \text{ руб.}, QE = 2600 \text{ шт.} \end{aligned}$$

На рисунке ситуация представлена графически:



2. После введения фиксированной цены, равной 2 руб. за единицу товара, ситуация на рынке будет характеризоваться дефицитом товара, поскольку по более низкой цене большее количество покупателей будут готовы приобрести товар и меньшее количество производителей – его произвести.

Определим объем дефицита товара:

$QD_1 = 3600 - 400 \cdot 2 = 2800$ шт. – величина спроса при цене 2 руб. заед. товара. $QS_1 = 1975 + 250 \cdot 2 = 2475$ шт. – величина предложения при цене 2 руб. за ед. товара. Таким образом, дефицит $QD_1 - QS_1 = 2800 - 2475 = 325$ штук.

Задача 8.4.

Спрос на бананы в магазине «Монетка» задан функцией $QD = 2200 - 75P$, а предложение – функцией $QS = P^2 - 176$, где P – цена, руб., а Q – объем продаж, кг. Определите, как изменится равновесная цена и объем продаж, если

после закрытия соседнего магазина спрос на бананы вырастет вдвое?

Решение.

Приравняем функции спроса и предложения и найдем точку равновесия:

$$\begin{aligned} 2200 - 75P &= P^2 - 176, \\ P^2 + 75P - 2376 &= 0, \\ P &= 24. \end{aligned}$$

Тогда $Q = 24^2 - 176 = 400$.

После увеличения спроса вдвое он станет равен:

$$Q = 2(2200 - 75P) = 4400 - 150P.$$

Найдем новую точку равновесия

$$4400 - 150P = P^2 - 176,$$

$$P^2 + 150P - 4576 = 0,$$

$$P = 26.$$

Тогда $Q = 26^2 - 176 = 500$.

Таким образом, цена вырастет с 24 до 26 рублей, а объем продаж – с 400 до 500 кг.

Задачи для самостоятельного решения [8]

Задача 8.5.

Определите равновесный объем, если функция спроса: $QD = 800 - 4 \times P$, функция предложения: $QS = 500 + 2 \times P$, где P – цена единицы продукции, руб./шт.; Q – количество, шт.

Задача 8.6.

Что будет происходить на рынке (дефицит или профицит), где функция спроса: $QD = 800 - 4 \times P$, функция предложения равна: $QS = 500 + 2 \times P$?

При этом неизвестна цена единицы продукции P , руб./шт., а количество Q равно 560 шт. изделий.

Задача 8.7.

Определите равновесный объем, если функция спроса: $QD = 250 - 0,5 \times P$, функция предложения: $QS = -16 + 0,5 \times P$, где P – цена единицы продукции, руб./шт.; Q – количество, шт.

Задача 8.8.

Определите равновесный объем, если функция спроса: $PD = 500 - 2 \times Q$, функция предложения: $PD = 32 + 2 \times Q$, где P – цена единицы продукции, руб./шт.; Q – количество, шт.

9. Производство и издержки. Выручка. Прибыль

В микроэкономическом анализе теория издержек производства основывается на осознании редкости ресурсов и определении их ценности на основе наилучшего варианта использования. В этом смысле издержки производства – стоимость отвлеченных от альтернативного использования ресурсов, определяемая по наилучшему из альтернативных вариантов их использования.

Производитель может привлекать ресурсы извне, и тогда издержки представляются в виде денежных выплат поставщикам ресурсов, а может использовать и собственные ресурсы, и тогда издержки производства представляются в виде затрат по удержанию ресурсов от альтернативного использования. Последний вид затрат не найдет отражения в бухгалтерском балансе, что будет означать занижение фактического уровня издержек производства. Поэтому различают бухгалтерские и экономические издержки

производства. Бухгалтерские (явные, внешние) издержки, осуществленные в денежной форме фактические расходы, связанные с осуществлением производства. Они включают в себя стоимость услуг факторов производства, которые не являются собственностью фирмы и представляют собой платежи за приобретаемые ресурсы поставщикам. Это могут быть платежи за электроэнергию, арендная плата и др. Бухгалтерские издержки отличаются от экономических тем, что они не включают стоимость услуг факторов производства, которые являются собственностью фирмы.

Экономические (полные) издержки – это стоимость всех отвлекаемых для данного производства ресурсов. К экономическим издержкам относятся:

- явные (внешние) издержки, представляющие собою денежные выплаты за привлеченные для производства ресурсы, т. е. затраты по оплате поставленных ресурсов, равные бухгалтерским издержкам;

- неявные (внутренние) издержки – это стоимость услуг факторов производства, которые используются в процессе производства, но не являются покупными (собственность фирмы). То есть это денежные платежи, которые могли бы быть получены за самостоятельно используемый ресурс при наилучшем из возможных способов его применении. Примером таких издержек может быть альтернативная стоимость использования не покупных ресурсов таких как земля, капитал и др.

- нормальная прибыль это – минимальная плата за удержание предпринимательских способностей от альтернативного использования (она может быть оценена в виде процента на капитал);

- безвозвратные издержки как затраты, не имеющие альтернативного использования, вмененные издержки которых равны нулю. Это ранее произведенные, но не принимаемые во внимание при принятии текущих решений затраты. Они представляют собою невосполнимые потери инвестиционных ресурсов, вызванные изменением вида или места деятельности.

Экономические издержки зависят от количества используемых ресурсов и цен на услуги факторов производства. Понимание экономистами издержек основывается на факте редкости ресурсов и возможности их альтернативного использования. Поэтому выбор определенных ресурсов для производства какого-либо товара означает невозможность производства какого-то другого товара.

Отправной точкой анализа издержек производства является функциональная зависимость, существующая между ними и объемом выпуска. Совокупные издержки (ТС) представляют собой сумму затрат всех ресурсов, используемых для производства данного товара. Совокупные издержки можно разделить на два подвида: постоянные издержки (FC) и переменные (VC).

Постоянные затраты не зависят от величины выпуска. Это стоимость тех ресурсов, которые не могут быть изменены в процессе их применения за короткий период (аренда, амортизация, процентные платежи, оклады административного и обслуживающего персонала).

Переменные издержки зависят от объема выпуска продукции и представляют собой стоимость изменяемых ресурсов (стоимость сырья, топливо, энергия, зарплата рабочих).

Чтобы определить совокупные издержки необходимо сложить постоянные и переменные издержки для каждого уровня выпуска продукции:

$$TC = VC + FC.$$

Для производителя важно знать расходы, которые несет фирма не только в связи с общим выпуском, но и в расчете на каждую единицу отдельно. Для этого определяют средние издержки.

Средние издержки (AC) – это совокупные издержки в расчете на единицу продукции (стоимость единицы продукции):

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

Средние издержки можно разбить на две составляющие: средние переменные (AVC) и средние постоянные (AFC) издержки.

Средние переменные издержки – это переменные издержки на единицу продукции:

$$AVC = \frac{VC}{Q}.$$

Средние постоянные издержки – это постоянные издержки на единицу продукции:

$$AFC = \frac{FC}{Q}.$$

Можно сделать вывод, что $ATC = AVC + AFC$.

Предельные издержки (MC) – это прирост издержек, получаемый при производстве каждой дополнительной единицы продукции:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}.$$

Предельные издержки не зависят от постоянных затрат, т.к. постоянные затраты не изменяются при изменении объема выпуска продукции.

Коммерческие предприятия стремятся к тому, чтобы получаемые от продажи произведенных товаров доходы превышали издержки производства данного товара. Общий доход, получаемый от продажи произведенных товаров, образует валовую выручку (доход) предприятия (TR). Обычно ее получение завершает определенный этап работы предприятия (как правило, производство партии товара). Размер выручки зависит от двух составляющих: объема производства (q) и цены данного товара (p): $TR = p \times q$. Однако предприятие работает ради прибыли (P), которая предстает как разность между выручкой (TR) и издержками производства: $P = TR - TC$.

Задача 9.1.

Родители подарили Васе на день рождения машину, и он решил бросить учебу и начать зарабатывать частным извозом. Стоимость бензина составляет 3000 рублей в месяц. Стоимость машины, которая будет использоваться в

течение 5 лет (поскольку автомобиль отечественного производства), составляет 200 тысяч рублей. Автомобиль ежегодно нуждается в ремонте на сумму 10 тысяч рублей, и его ликвидационная стоимость равна нулю.

Предположим, что доход Васи от извоза составит 15 тысяч рублей в месяц. Стипендия Васи в университете составляла бы 1200 рублей в месяц. Вася не платит налоги, но вынужден каждый месяц платить 1500 рублей за «крышу».

Определите:

1. Бухгалтерскую и экономическую прибыль Васи за год.
2. Стоит ли ему начинать свое дело?

Решение.

1. При занятии частным извозом бухгалтерские издержки составят:
 3000×12 (бензин) + $200000 / 5$ (амортизационные отчисления) + 10000 (расходы на ремонт) + 1500×12 (расходы на «крышу») = 104 тысячи рублей.

Выручка Васи составит $15000 \times 12 = 180$ тысяч рублей.

Бухгалтерская прибыль = $180 - 104 = 76$ тысяч рублей.

Неявные издержки (упущенная возможность получать стипендию) = $1200 \times 12 = 14400$ рублей.

Экономическая прибыль = $76000 - 14400 = 61\,600$ рублей.

2. Поскольку экономическая прибыль положительна, имеет смысл начинать свое дело.

Задача 9.2.

Предприниматель Сладкоежкин планирует открыть кондитерскую. Он решил нанять трех кондитеров с заработной платой 25 000 рублей в месяц и потратил весь свой стартовый капитал в сумме 400000 рублей на покупку сырья и материалов. Для того чтобы финансировать покупку оборудования, он взял в банке кредит на несколько лет под 20% годовых и купил на сумму 500000 рублей оборудование, срок службы которого составляет 5 лет, а ликвидационная стоимость равна нулю. Процент по депозитам в банке на 8 пунктов ниже процента по кредитам. Предприниматель использует собственное помещение для кондитерской. Это помещение он мог бы сдать в аренду и получать за него в виде арендной платы 25 000 рублей в месяц. Раньше Сладкоежкин работал управляющим в соседнем ресторане с заработной платой 45 000 рублей в месяц. Суммарный годовой доход кондитерской ожидается в размере 1 800000 рублей. Определите:

- 1) величину годовых бухгалтерских (явных) и экономических издержек нашего предпринимателя;
- 2) величину его бухгалтерской и экономической прибыли за год;
- 3) что бы вы посоветовали владельцу кондитерской?

Решение.

Бухгалтерские (явные) издержки		Неявные издержки	
Зарплата работникам: $25000 \times 3 \times 12 = 900000$	900000	Процент по депозитам, который можно было бы получить: $(0,2 - 0,08) \times 400000 =$ $= 0,12 \times 400000 = 48\,000$	48 000

Сырье: 400000	400000	Аренда: $25000 \times 12 = 300000$	300000
Амортизационные отчисления: $500000/5 = 100000$	100000	Зарплата в ресторане: $45000 \times 12 = 540000$	540000
Кредит: $500000 \times 0,2 = 100000$	100000		
Итого:	1500000	Итого:	888000

Экономические издержки = бухгалтерские издержки + неявные издержки:
 $ЭИ = 1500000 + 888000 = 2388000$ рублей.

Бухгалтерская прибыль = доход – бухгалтерские (явные) издержки:

$БП = 1800000 - 1500000 = 300000$ рублей.

Экономическая прибыль = доход – экономические издержки:

$ЭП = 1800000 - 2388000 = -588000$ рублей.

Таким образом:

1. Величина годовых бухгалтерских (явных) издержек = 1500000 рублей, величина экономических издержек = 2 388 000 рублей.
2. Бухгалтерская прибыль = 300000 рублей.
3. Экономическая прибыль = –588000 рублей.
4. Так как экономическая прибыль отрицательная, то предпринимателю не стоит открывать кондитерскую.

Задача 9.3.

В таблице представлена часть данных о возможных вариантах ведения бизнеса на некотором предприятии при неизменных постоянных издержках. Восстановите недостающую информацию.

		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Цена, руб.	p		70	50
Объем продаж, тыс. шт.	q	30	40	
Выручка, тыс. руб.	TR			
Постоянные издержки, тыс. руб.	FC			
Переменные издержки, тыс. руб.	VC		900	1200
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	1600	1900	
Прибыль, тыс. руб.	π	800		800

Решение.

2 вариант: $FC = TC - VC = 1900 - 900 = 1000$.

Так как по условию задачи постоянные издержки неизменны, значит во всех вариантах $FC = 1000$.

$TR = q \times p = 70 \times 40 = 2800$, $\pi = TR - TC = 2800 - 1900 = 900$.

1 вариант: $FC = 1000$, $VC = TC - FC = 1600 - 1000 = 600$.

$TR = \pi + TC = 800 + 1600 = 2400$, $p = TR/q = 2400/30 = 80$.

3 вариант: $TC = VC + FC = 1000 + 1200 = 2200$, $TR = \pi + TC = 800 + 2200 = 3000$, $q = TR/p = 3000/50 = 60$.

		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Цена, руб.	p	80	70	50
Объем продаж, тыс. шт.	q	30	40	60
Выручка, тыс. руб.	TR	2400	2800	3000
Постоянные издержки, тыс. руб.	FC	1000	1000	1000
Переменные издержки, тыс. руб.	VC	600	900	1200
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	1600	1900	2200
Прибыль, тыс. руб.	π	800	900	800

Задача 9.4.

Фирма может производить шапки, шарфы и варежки со следующими издержками:

Товар	Издержки на единицу продукции, руб.	Цена реализации, руб.	Объем продаж, шт.
Шапка	170	230	185
Шарф	160	210	200
Варежки	140	190	218

Определите, какой товар будет производить фирма, если ее производственные возможности позволяют ей производить только один из указанных товаров?

Решение.

Для определения наиболее выгодного варианта производства необходимо на основе имеющихся данных определить выручку, общие затраты и прибыль фирмы:

Товар	Издержки на единицу продукции, руб.	Цена реализации, руб.	Объем продаж, шт.	Общая выручка, руб.	Общие издержки, руб.	Прибыль, руб.
Шапка	170	230	185	42550	31450	11100
Шарф	160	210	200	42000	32000	10000
Варежки	140	190	218	42420	31520	9900

Следовательно, фирма выберет производство шапок, т.к. этот вариант позволит ей получить наибольшую прибыль.

Задача 9.5.

Крупное российское предприятие закупает сырье за рубежом. В конце 2024 года рубль сильно подешевел относительно других валют, в результате чего затраты на сырье в рублях в расчете на единицу продукции изменились на 100%. Остальные составляющие средних переменных издержек сохранились. Однако предприятие приняло решение об изменении объема производства. В результате этого средние совокупные издержки возросли на 300 рублей, а общие постоянные издержки не изменились.

Первоначально средние совокупные издержки составляли 500 рублей на единицу продукции, средние постоянные издержки были равны 100 рублей на единицу продукции, а затраты на сырье составляли 50% переменных затрат. Определите, на сколько процентов фирма изменила объем производства.

Решение.

По условию задачи: $ATC_1 = 500$, $AFC_1 = 100$. Следовательно, средние переменные затраты будут равны: $AVC_1 = 500 - 100 = 400$. Из них затраты на сырье составляют 50%: $400 \times 0,5 = 200$.

После того как рубль сильно подешевел относительно других валют, затраты на сырье в рублях в расчете на единицу продукции изменились на 100%, следовательно, выросли в два раза: $200 \times 2 = 400$, а прочие составляющие средних переменных издержек сохранились, значит: $AVC_2 = 400 + 200 = 600$. Кроме этого, средние совокупные издержки возросли на 300 рублей: $ATC_2 = ATC_1 + 300 = 500 + 300 = 800$, а также по условию $FC_2 = FC_1$. $FC_1 = AFC_1 \times Q_1 = 100 \times Q_1$.

Так как средние совокупные затраты состоят из средних постоянных и средних переменных затрат: $ATC = AFC + AVC$, можно составить уравнение: $ATC_2 = (100 \times Q_1) / Q_2 + 600 = 800$. Отсюда $Q_1 / Q_2 = 2$. $Q_2 = 0,5 Q_1$.

$$\Delta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} \cdot 100\% = \frac{0,5Q_2 - Q_1}{Q_1} \cdot 100\% = -50\%.$$

Таким образом, фирма уменьшила объем производства на 50%.

Задачи для самостоятельного решения[8]

Задача 9.6.

Цена единицы продукции равна 300 руб., объем продаж составляет 20 тыс. изделий в год. Фирма затрачивает на маркетинг 250 тыс. руб. в год, а расходы на сырье для производства составляют 30 руб. на единицу продукции. Чему равна прибыль фирмы?

Задача 9.7.

Производственные расходы предприятия составили 20 руб. в расчете на единицу продукции, арендная плата за помещение составила 600 тыс.руб. в год, траты на электроэнергию составили 100 тыс. руб. в год. За год фирмой было реализовано 15 тыс. изделий по цене 1000 руб. за штуку. Чему равна годовая выручка данной фирмы?

Задача 9.8.

Владелец фирмы выплатил наемным работникам 50 тыс. руб. Плата процентов за кредит составила 100 тыс. руб.; амортизационные отчисления – 50 тыс. руб.; затраты на сырье, отопление, освещение, ремонт – 30 тыс. руб. Совокупный доход фирмы составил 300 тыс. руб. Определите, чему равна бухгалтерская прибыль фирмы.

Задача 9.9.

Владелец фирмы выплатил оклады работникам в размере 180 тыс.руб. Амортизационные отчисления составили 40 тыс. руб.; затраты на сырье – 90 тыс. руб. От вложений своего капитала в другое предприятие владелец фирмы мог бы получать 20 тыс. руб. Его годовая выручка составила 1 млн руб. Определите, чему равна экономическая прибыль фирмы.

Задача 9.10.

Издержки фирмы представлены следующим образом: затраты на оплату труда наемных работников – 150 ден. ед.; отчисления на социальные нужды – 250 ден. ед.; амортизационные отчисления – 200 ден. ед.; альтернативная ценность труда и способностей предпринимателя – 150 ден. ед. Выручка от продажи произведенной продукции составляет 1000 ден. ед. Определите бухгалтерскую и экономическую прибыль фирмы.

Задача 9.11.

Определите прибыль от реализации 5000 единиц печатной продукции, если известно, что себестоимость одной единицы составляет 130 руб., а оптовая цена – 150 руб.

Задача 9.12.

Заполните недостающие данные:

Q	P	TR	TC	π
30	60			300

Задача 9.13.

Заполните недостающие данные:

Q	P	TR	TC	π
50		3000	2500	

Задача 9.14.

Заполните недостающие данные:

Q	P	TR	TC	π
	90		1800	0

Задача 9.15.

Графический дизайнер принял решение уволиться из фирмы, где ему платили заработную плату 100 тыс. руб. в месяц, а также ежеквартальную премию в размере 10 тыс. руб. Он решил открыть собственную торговую точку по продаже продукции на вынос. В дело он вложил 1200 тыс. руб. собственных сбережений, а недостающие 400 тыс. руб. он взял в кредит в коммерческом банке под 16% годовых. Ему удалось арендовать помещение за 60 тыс. руб. в месяц, траты на приобретение необходимого оборудования составили 200 тыс. руб., срок эксплуатации которого составляет пять лет. Он нанял нескольких сотрудников, которым ежемесячно выплачивает заработную плату в размере 120 тыс. руб. В целях привлечения клиентов ему пришлось провести рекламную кампанию, затраты на нее составили 40 тыс. руб. Помимо этого ежемесячно он тратит 5 тыс. руб. на ведение группы в социальных сетях. Страховые взносы составляют 40 тыс. руб. в год. Процент по банковским вкладам – 13% годовых. За первый год работы было

реализовано продукции на сумму 4 млн руб. Чему равна бухгалтерская и экономическая прибыль данного производителя?

Задача 9.16.

Инженер уволился с завода, на котором ему платили 40 тыс. руб. в месяц, и открыл свой магазин, зарегистрировав ИП. В дело он вложил 300 тыс. собственных сбережений и 200 тыс., которые он получил в кредит в банке под 14% годовых. Он арендовал помещение за 50 тыс. руб. в месяц, приобрел соответствующее оборудование за 300 тыс. руб., срок эксплуатации которого составляет 5 лет. На приобретение товаров для продажи он тратит в месяц 100 тыс. руб. Как ИП он должен оплатить взносы в ПФР в размере 32 448 руб., а также в ФФОМС в размере 8426 руб., так как документы для регистрации ИП он подавал в электронном виде, то госпошлина с него не взималась. Для работы ему потребовалось приобрести кассовый аппарат, стоимость которого составила 6000 руб., а оплата обслуживания в год – 3000 руб. За год работы магазина выручка составила 2,5 млн руб. Доходность частных вкладов составляет 15%. Возможно, инженеру следует снова вернуться работать на завод? Для ответа на данный вопрос рассчитайте величину экономической прибыли.

Задача 9.17.

Вам пришла идея открыть собственное дело в сфере консалтинговых услуг, но для этого нужно зарегистрировать ИП, заплатить госпошлину в размере 800 руб., а также приобрести лицензию и уплатить за это стандартную госпошлину в размере 7500 руб. Для работы потребовалось также приобрести современный компьютер стоимостью 120 тыс. руб., на которые вы использовали собственные сбережения. Поскольку можно работать удаленно, нет необходимости арендовать помещение. Расходы на приобретение и обслуживание кассового аппарата составили 10 тыс. руб. Сумма налоговых отчислений по УСН (упрощенной системе налогообложения) составила 100 тыс. руб. в год, величина страховых взносов в соответствующие фонды – 40 тыс. руб. Вам поступило предложение из крупной международной компании, которая предложила должность аудитора с окладом 150 тыс. руб. в месяц. За один год работы ваша выручка составила 2 млн руб., при этом процент по банковским вкладам составил 10% годовых. Имеет смысл продолжать свое дело или лучше принять предложение крупной компании?

Задача 9.18.

Пекарь Петров решил открыть свою мини-пекарню. Он арендовал помещение за 100 тыс. руб. в месяц, пригласил на работу специалиста-технолога, которому нужно платить заработную плату в размере 720 тыс. руб.

в год. Расходы на сырье составили 150 тыс. в месяц, расходы на транспорт по сервису СБЕР-автоподписка – 35 тыс. руб. в месяц, однако в результате превышения годового трафика, определенного тарифом, пришлось заплатить еще 10 тыс. руб. Расходы на рекламу составили 80 тыс. руб. До этого Петров работал на хлебозаводе и получал заработную плату в размере 35 тыс. руб. в

месяц. Вычислите размер бухгалтерской и экономической прибыли, если известно, что за год выручка составила 4300 тыс. руб.

Задача 9.19.

В таблице представлены данные о показателях деятельности предприятия. Восстановите недостающую информацию.

	1 год	2 год	3 год
Q	20		70
P		38	30
TR		1520	
FC			
VC	800		1700
TC	1100		
π	250	220	

Задача 9.20.

В таблице представлены данные о показателях деятельности предприятия. Восстановите недостающую информацию.

	1 год	2 год	3 год
Q		32	50
P	30		
TR			820
FC			
VC	1000	900	
TC	1100		
π	100	280	120

Задача 9.21.

Предприятие осуществляет пошив готового платья. В месяц выпуск составляет 70 штук. Цена продажи – 3000 руб. Для пошива одного платья требуется использование ткани и фурнитуры на 1000 руб. Аренда помещения составляет 100 000 руб. ежемесячно, заработная плата рабочих, включая социальные взносы, – 500 000 руб. за тот же период, прочие издержки – 300 000 в месяц. Производство изделий осуществляется на швейном оборудовании стоимостью 15 000 000 руб. и сроком полезного использования 5 лет. Налог на прибыль составляет 20%. Необходимо определить чистую прибыль предприятия за месяц.

Задача 9.22.

Мебельная фабрика производит мягкие диваны в количестве 250 штук в год. Для производства каждого дивана требуются материалы (дерево, ткань, фурнитура) стоимостью 9000 руб. Фонд оплаты труда рабочих составляет 1 700 000 руб., включая социальные взносы. Доставка диванов до потребителей осуществляется транспортной компанией по фиксированной цене 500 руб. за один диван. Прочие коммерческие и управленческие постоянные расходы составляют 200 000 руб. Фабрика использует оборудование стоимостью 10 000 000 руб. и сроком полезного использования 10 лет. Определите цену, за которую фабрика должна продавать свою продукцию, чтобы получить прибыль (до налогообложения) в размере 4 000 000 руб.

Задача 9.23.

Компания «Стрела» занимается производством телевизоров. Средние переменные издержки составляют 25 000 руб. на каждый телевизор. Постоянные издержки, такие как аренда помещения, управление предприятием, заработная плата рабочих, амортизация оборудования и прочее, составляют 15 000 000 руб. При этом рыночная цена телевизора равна 40 000 руб. Рассчитайте точку безубыточности производства при заданных условиях, т.е. определите, при каком объеме производства прибыль компании

(до налогообложения) будет нулевой.

Задача 9.24.

Фабрика производит обои для стен в рулонах. Известно, что рыночная цена в регионе составляет 3000 руб. за один рулон. На производство одного рулона требуется бумага стоимостью 700 руб. и краска стоимостью 300 руб. Заработная плата рабочих составляет 10 000 000 руб. в год, включая социальные взносы. Прочие постоянные издержки равны 4 000 000 руб. в год. Стоимость оборудования – 8 000 000 руб. со сроком полезной службы четыре года. Собственник рассчитывает получить прибыль в размере 6 000 000 руб. за год. Определите, сколько рулонов обоев должно реализовать предприятие для получения целевой прибыли при заданных условиях.

Задача 9.25.

Индивидуальный предприниматель планирует заняться производством праздничных тортов. Анализ рынка показал, что средняя цена одного торта составляет 1500 руб. в его регионе при объеме спроса 600 штук в месяц. На изготовление одного торта требуются продукты стоимостью 500 руб. Постоянные издержки, такие как заработная плата и амортизация, составляют 150 000 руб. в месяц. Предприниматель планирует получать прибыль (до налогов) 400 000 руб. в месяц. Ему осталось выбрать наиболее подходящее помещение в аренду. Предлагаются на выбор три варианта, с ежемесячным платежом 60 000 руб., 50 000 руб. и 40 000 руб. (чем дороже аренда, тем лучше помещение). Какой вариант аренды будет оптимален в данной ситуации?

Задача 9.26.

Иван Петров принял решение открыть свой бизнес по производству сыра и управлять им лично. Согласно прогнозам, ежедневный спрос на продукт составит 30 кг сыра по цене 700 руб/кг. Для производства 1 кг сыра требуется 10 литров молока оптовой стоимостью 20 руб. за литр, а также ферменты на 50 руб. Заработная плата технолога составит 70 000 руб. в месяц (без учета социальных взносов 30%), заработная плата рабочего составит 50 000 руб. в месяц (без учета социальных взносов 30%). Кроме того, потребуется продавец сыра с заработной платой 45 000 руб. в месяц (без учета социальных взносов 30%). Для открытия производства Иван приобрел на свои сбережения оборудование стоимостью 1 200 000 руб. и сроком полезного использования пять лет. Для производства он выделил нежилое помещение, которое находится в его собственности. Коммунальные платежи составляют 10 000

руб. в месяц. Кроме того, он арендовал аналогичное помещение для магазина с арендной платой 30 000 руб. ежемесячно. Магазин будет работать ежедневно. Иван сам является технологом по производству сыров. Ставка процента по депозитам составляет 10% годовых, налог на прибыль – 20%, налог на доходы физических лиц – 13%. Рассчитайте бухгалтерскую и экономическую прибыль предпринимателя за год.

Задача 9.27.

Химическое предприятие имеет производственные возможности для изготовления 90 тонн серы или 50 тонн селитры (другие комбинации невозможны в силу технологических особенностей). На производство всей серы требуется сырье стоимостью 13 500 000 руб., а на производство всего объема селитры нужно сырье стоимостью 8 000 000 руб. Стоимость оборудования составляет 21 000 000 руб. со сроком полезной службы 7 лет. За аренду производственного помещения и офиса необходимо платить 500 000 руб. в год. Прочие постоянные издержки равны 5 000 000 руб. Цена одной тонны серы составляет 350 000 руб., а одной тонны селитры – 300 000 руб. Определите, какой продукт выгоднее производить для химического предприятия. Рассчитайте прибыль от производства данного продукта и средние издержки на него.

28. Завод производит детские самокаты «Радуга». Цена за один самокат составляет 3000 руб. при объеме продаж 10 000 штук в год. Переменные издержки на единицу выпуска равны 2000 руб., общие постоянные издержки составляют 12 000 000 руб. Рассчитайте, является ли производство прибыльным или убыточным, а также – сколько самокатов в год следует производить предприятию.

Задача 9.28.

Компания «Гамма» производит фарфоровую посуду и продает по цене 6000 руб. за сервиз в количестве 7000 сервизов в год. Переменные издержки на производство одного сервиза составляют 3500 руб. Общие постоянные издержки равны 9 000 000 руб. Крупная ресторанная сеть предложила компании заказ на производство дополнительных 1000 сервизов, но по цене ниже рынка (5000 руб.). Стоит ли согласиться на производство этого заказа и почему? Какую прибыль дополнительно получит компания «Гамма» от выбранного варианта действий? При какой цене от ресторанной сети она должна отказать в производстве дополнительной продукции?

Задача 9.29.

Завод занимается производством бумаги. Его годовой доход составляет 800 000 000 руб. при объеме реализации 10 000 000 пачек. Постоянные расходы равны 350 000 000 руб. За год завод получил прибыль в размере 200 000 000 руб. Определите переменные затраты на одну пачку бумаги.

Проверочная работа №3

Вариант 1

Задача 1.

Вы с подругой, имея одинаковые предпочтения и доходы, собираетесь посетить выставку скульптур современного художника, которая проходит на

территории музея под открытым небом. Подруга купила себе невозвратный электронный билет, предоставляющий право посещения выставки в строго определенный день, а вы решили приобрести билет в кассе по приходе в музей. Стоимость билета в обоих случаях составляет 500 руб. В назначенный день сильно испортилась погода, что сделало перспективу похода на выставку менее привлекательной. Если вы с подругой являетесь рациональными индивидами, есть ли у кого-то из вас больше стимулов пойти на выставку?

Задача 2.

Студенты гуманитарного факультета Лиза и Кристина работают над совместным проектом по экономике. Перед защитой проекта они собрались для дискуссии, каждая предварительно подготовила материалы по своей части проекта. Для завершения работы им необходимо напечатать текст и сделать презентацию. У Лизы выше производительность, она за час может напечатать 8 страниц текста или сделать 8 слайдов. Кристина печатает со скоростью 5 страниц в час, за это же время она может подготовить 4 слайда. Постройте совместную кривую производственных возможностей студентов. Кто из них обладает абсолютным и сравнительным преимуществом в каждом виде деятельности? Справятся ли они с заданием напечатать 14 страниц текста и сделать 12 слайдов презентации за 2 часа, если распределят обязанности наиболее эффективно?

Задача 3.

Чтобы организовать собственное дело, Петрова оставила работу системного администратора с окладом 90 тыс. руб. в месяц. Необходимые для ведения деятельности помещения она арендует за 500 тыс. руб. в год. Покупка оборудования со сроком службы 6 лет обошлась ей в 600 тыс. руб. Годовой фонд заработной платы на ее фирме составляет 700 тыс. руб. Для организации дела она использует 1800 тыс. руб. собственных сбережений, а недостающие для создания товарных запасов 650 тыс. руб. берет в кредит под 18% годовых. Процент по вкладам – 12% годовых. За год ее выручка составила 2,7 млн руб. Рассчитайте величину бухгалтерской и экономической прибыли фирмы.

Задача 4.

Сидоров работает в сфере логистики, его заработная плата составляет 50 тыс. руб. в месяц. Он решил открыть собственную фирму, которая будет заниматься осуществлением грузоперевозок. Для организации дела он взял кредит в размере 2 млн руб. под 9% годовых. Ему пришлось нанять себе помощника, которому он платит заработную плату в размере 25 тыс. руб. в месяц и трех экспедиторов, каждому из них он платит по 60 тыс. руб. ежемесячно. Для аренды машин Сидоров воспользовался новым сервисом СБЕРа – автоподпиской, и ему ежемесячно придется платить 36 тыс. руб. В качестве офисного помещения он использует часть своего дома, который бы

он мог сдавать за 500 тыс. руб. в год. Всего за прошедший год компания оказала 1500 логистических услуг, средняя стоимость услуги составила 3000 руб. Рассчитайте, чему будет равна величина экономической прибыли для данного производителя.

Задача 5.

Определите равновесную цену, если функция спроса: $QD = 250 - 0,5 \times P$, функция предложения: $QS = -27,2 + 0,4 \times P$.

Задача 6.

Что будет происходить на рынке (дефицит, профицит, равновесие), где функция спроса: $QD = 50 - 0,1 \times P$, функция предложения: $QS = -25 + 0,2 \times P$? При этом известно, что производители выйдут на рынок с продукцией в количестве Q , равном 20 шт. изделий.

Вариант 2

Задача 1.

Профессиональный переводчик сопровождает первых лиц государства при выездах за границу, присутствует на всех крупных международных форумах и в целом очень востребован. За работу он получает 500 тыс. руб. в месяц. Помимо того, что он в совершенстве владеет несколькими иностранными языками, у него есть талант доступно объяснять, и он с легкостью мог бы обучить языку своего сына. Он мог бы это сделать гораздо лучше и быстрее любого хорошего преподавателя иностранного языка. Однако он решил нанять сыну репетитора и платит ему 2500 руб. в час. Чтобы подтянуть знания сына, преподавателю требуется не менее 30 часов, в то время как переводчик мог бы добиться такого же результата всего за 15 часов. Правильно ли он поступил, наняв сыну репетитора вместо того, чтобы обучать его самостоятельно?

Задача 2.

В чем смысл жизни? Один из самых серьезных, вечных и безответных вопросов нашего мира. Большинство людей стремится найти его в личном счастье. А из чего состоит счастье? При аппроксимации счастье определяется как совокупность времени, которое мы можем потратить на своих близких и любимые дела, а также возможности, которые мы можем реализовать с помощью денег. Представим, что выпускник вуза получил предложение о работе в компании ООО «Музыкальные истории» с графиком 5/2, 8-часовым рабочим днем и окладом 40 тыс. руб. Таким образом, у него остается еще 72 часа на свои личные дела, хобби, которые делают его счастливее. Так он может провести 10 лет своей жизни. Есть другой вариант. Он может также устроиться в компанию ООО «Музыкальные истории», но первые три года заниматься английским языком по 10 часов в месяц (стоимость часа занятия 1 тыс. руб.), а по прошествии трех лет с учетом приобретенных знаний

устроиться в другую фирму с окладом 90 тыс. руб. в месяц и 52 часами свободного времени в неделю. На новом месте он проработает еще 7 лет. Каким путем следует пойти выпускнику, чтобы по истечении 10 лет оглянуться назад и понять, что он стал счастливее? Для ответа примем следующие коэффициенты перевода в условные единицы счастья: 1) 1 тыс. руб. эквивалентна 8 у.е. счастья; 2) поскольку отдых после усердной работы ценится больше – если человек в неделю работает больше, чем отдыхает, то 1 час отдыха эквивалентен 10 у.е. счастья, а если он отдыхает больше, чем работает, то 1 час отдыха эквивалентен 7 у.е. счастья.

Задача 3.

Чтобы организовать собственное дело, Иванов уволился с должности специалиста ПО с окладом 100 тыс. руб. в месяц и ежемесячными премиальными надбавками в размере 5 тыс. руб. Для нужд своей фирмы он использует собственное офисное помещение, которое мог бы сдавать в аренду за 60 тыс. руб. в месяц. Для совершения поездок по городу для нужд фирмы он использует каршеринговый сервис, что в месяц обходится ему в 5000 руб. Свои предпринимательские способности он оценивает в 250 тыс. руб. в месяц, так как самостоятельно ведет все дела фирмы, не используя наемный труд. Ему потребовалось приобрести необходимую технику и офисную мебель, траты на них составили 400 тыс. руб., которые он покрыл из личных сбережений. Процент по банковским вкладам составляет 15% годовых. За прошедший год выручка Иванова составила 5,5 млн руб. Рассчитайте величину бухгалтерской и экономической прибыли.

Задача 4.

Наемный работник принимает решение уйти с позиции менеджера, на которой он получал оклад в размере 60 тыс. руб. в месяц, чтобы создать собственную фирму. Для нужд фирмы он использует личный автомобиль, а две машины арендует за 500 тыс. в год каждую. Аренда торговых площадей обходится ему в 70 тыс. руб. в месяц, закупка необходимого оборудования со сроком службы 8 лет – 160 тыс. руб. Расходы на заработную плату сотрудникам составляют 500 тыс. в год. Для организации дела он использовал свои собственные сбережения в размере 550 тыс. руб., а недостающие 300 тыс. для создания товарных запасов взял в кредит под 11% годовых. Процент по банковским вкладам составляет 9%. Его годовая выручка составила 4 млн в год. Какую экономическую прибыль получит предприниматель? Нужно ли ему продолжать свое дело или лучше закрыть его?

Задача 5.

Определите равновесную цену, если функция спроса: $PD = 500 - 2 \times Q$, функция предложения: $PD = 68 + 2,5 \times Q$.

Задача 6.

Что будет происходить на рынке (дефицит, профицит, равновесие), где функция спроса: $QD = 300 - 5 \times P$, функция предложения: $QS = 100 + 5 \times P$?

При этом цена неизвестна, а производитель выйдет на рынок с продукцией в количестве Q , равном 190 шт. изделий.

10. Описательная статистика

Задачи, представленные в разделах по статистике изложены в [7]. Здесь мы рассмотрим некоторые из них.

Рассматриваемые в данном разделе основные понятия, термины и формулы, а также условия их применимости удобнее всего изучать в процессе решения конкретной задачи. Поэтому изложение строится таким образом, что прежде выделяется ключевая особенность, позволяющая определить, какая, например, из средних величин предполагается в данной задаче, а затем по указанной формуле её производится её нахождение.

Виды средних величин

Средняя величина – это обобщающий показатель, характеризующий типический уровень явления в конкретных условиях места и времени. Он отражает величину признака, отнесенную к единице совокупности.

Средняя всегда обобщает количественную вариацию признака, т.е. в средних величинах погашаются индивидуальные различия единиц совокупности, обусловленные случайными обстоятельствами.

В статистике выделяют степенные и структурные средние. Под структурными средними понимают моду и медиану. Степенные, в свою очередь, бывают простыми и взвешенными.

Простая средняя исчисляется по несгруппированным данным:

$$\bar{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^m}{n}}$$

где x_i – значение осредняемого признака;

m – показатель степени средней;

n – число значений осредняемого признака.

Взвешенная средняя исчисляется по сгруппированным данным, представленным в виде дискретных или интервальных рядов распределения:

$$\bar{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^m f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

где x_i – значение осредняемого признака или срединное значение интервала, в котором измеряется признак;

m – показатель степени средней;

f_i – частота, показывающая сколько раз в совокупности встречается i -е значение осредняемого признака.

В зависимости от показателя степени средней (m) получают соответствующую степенную среднюю:

при $m = -1$ получаем среднюю гармоническую;
 при $m = 0$ среднюю геометрическую;
 при $m = 1$ среднюю арифметическую;
 при $m = 2$ среднюю квадратическую, и т.д.

Вид степенной средней	Показатель степени средней (m)	Формула расчета	
		Простая	Взвешенная
Гармоническая	-1	$\bar{X} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$	$\bar{X} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$ где $k = xf$
Геометрическая	$\rightarrow 0$	$\bar{X} = \sqrt[n]{\prod x}$ $= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$	$\bar{X} = \sqrt[\sum f]{\prod x^f}$ $= \sqrt[\sum f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_n^{f_n}}$
Арифметическая	1	$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$
Квадратическая	2	$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$	$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$

Выбор формулы для расчета средней не может быть произвольным. Он должен основываться на смысловом содержании исходных данных и на условиях применения конкретной формулы для вычисления средней.

Задача 10.1.

Измерив рост всех студентов в группе, получили следующие данные: 1,64 м, 1,86 м, 1,72 м, 1,95 м, 1,76 м, 1,65 м, 1,79 м, 1,82 м, 1,92 м. Найти средний рост студентов в группе.

Решение.

Для определения среднего роста студентов в группе необходимо суммарный рост всех студентов в группе разделить на количество студентов. Всего в группе 9 студентов, обозначим рост каждого студента x_i , где i принимает значения от 1-го до 9-ти. Тогда, средний рост определяется по формуле средней арифметической простой

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{1,64 + 1,86 + 1,72 + 1,95 + 1,76 + 1,65 + 1,79 + 1,82 + 1,92}{9} \\ &= \frac{16,11}{9} = 1,79 \text{ м.}\end{aligned}$$

Задача 10.2.

В течение учебного года первые четыре месяца студент не получал стипендию, следующие шесть месяцев размер стипендии составил 2,5 тыс. руб., в оставшиеся два месяца – 3,3 тыс. руб. Найти среднюю стипендию студента в рассматриваемом году.

Решение.

Пусть x_i – размер стипендии в месяц, тыс. руб. (значения осредняемого признака). f_i – число месяцев, в течение которых стипендия составляла

данную сумму(частота, показывающая сколько раз в рассматриваемом периоде (год) встречается i -е значение осредняемого признака).

Запишем данные о размере стипендии студента в виде таблицы:

x_i	f_i
0	4
2,5	6
3,3	2

Тогда, средний за год размер стипендии студента определяется по формуле средней арифметической взвешенной и составляет:

$$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0 \cdot 4 + 2,5 \cdot 6 + 3,3 \cdot 2}{4 + 6 + 2} = \frac{21,5}{12} = 1,8 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 10.3.

Были проведены испытания точности спортивной винтовки, а именно, произведены 5 выстрелов, в каждом из них пуля отклонилась от цели на:

Номер испытания по порядку	Отклонение от цели, в мм
1	0 (точно в цель)
2	20
3	-16
4	0 (точно в цель)
5	-4

Найти среднюю величину отклонения от цели при стрельбе из спортивной винтовки.

Решение.

В данном случае суммируя все значения осредняемого признака (x_i – отклонение от цели при стрельбе) получаем нулевую сумму:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0 + 20 - 16 + 0 - 4 = 0.$$

В этом случае, используя простую среднюю арифметическую для расчета среднего значения отклонения от цели, мы получили бы нулевой результат. Что неверно, так как по данным испытать нельзя сказать, что винтовка бьет без промаха. Потому, для расчета средней величины отклонения от цели воспользуемся формулой средней квадратической простой:

$$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5}} = \sqrt{\frac{0^2 + 20^2 + (-16)^2 + 0^2 + (-4)^2}{5}} = 11,59 \text{ мм.}$$

Т.е. в результате пяти выстрелов среднее отклонение от цели составило 11,59 мм (в обе стороны, т.е. + / -).

Задача 10.4.

Были проведены испытания на точность спортивной винтовки, всего 15 испытаний. В первом, седьмом и девятом испытаниях пуля отклонилась от

цели на 12 мм, в четвертом и пятнадцатом попала точно в цель, и т.д. Результаты всех испытаний представлены в таблице

Номер испытания	Отклонение от цели, в мм	Количество попыток с соответствующим исходом
1, 7, 9	12	3
2, 5, 11, 13	-15	4
3, 6, 8, 10, 12, 14	4	6
4, 15	0 (точно в цель)	2

Найти среднюю величину отклонения от цели при стрельбе из спортивной винтовки.

Решение.

Отклонение от цели, измеренное в мм – это значение осредняемого признака (x_i), количество попыток с соответствующим исходом – это частота (f_i). Тогда

$$\sum_{i=1}^{15} x_i f_i = 12 \cdot 3 + (-15) \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 2 = 0.$$

При использовании средней арифметической взвешенной результат средней величины отклонения от цели получается нулевой. Такой результат средней величины отклонения от цели не будет объективным, так как лишь в двух испытаниях из пятнадцати пуля попала точно в цель. Потому, для нахождения средней величины отклонения от цели воспользоваться формулой средней квадратической взвешенной

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 3 + (-15)^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 6 + 0^2 \cdot 2}{3 + 4 + 6 + 2}} = \sqrt{\frac{1428}{15}} = \sqrt{95,2} \\ &= 9,76 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Таким образом, среднее отклонение от цели в результате 15-ти испытаний составило 9,76 мм. (отклонение как +, так и –).

Задача 10.5.

Группа из пяти студентов сдает экзамен (решает задачи) который длится 3 часа. Первый студент тратит на решение одной задачи 24 мин, второй – 30, третий – 40, четвертый – 45 мин и пятый – 60 мин. Найти средние затраты времени на решение одной задачи группой студентов (всеми пятью студентами) при условии, что каждый решает задачи самостоятельно.

Решение.

Обозначим T_i – продолжительность экзамена (3 часа · 60 мин = 180 мин); x_i – время, затрачиваемое каждым студентом на решение одной задачи (именно для этого параметра нам и нужно определить среднее значение); q_i – количество задач решаемых за экзамен каждым студентом. Тогда, количество задач, решенных за экзамен каждым из студентов (q_i) определим из соотношения

$$q_i = \frac{T_i}{x_i}.$$

$q_1 = 180 \text{ мин} / 24 \text{ мин} = 7,5$ задач за экзамен, т.е. первый студент за 3 часа экзамена (или 180 мин) решат 7,5 задач;
 второй $q_2 = 180 / 30 = 6$ задач за экзамен;
 третий $q_3 = 180/40 = 4,5$ задачи за экзамен;
 четвертый $q_4 = 180/45 = 4$ задачи за экзамен;
 пятый $q_5 = 180/60 = 3$ задачи за экзамен.

Теперь, зная суммарное время, потраченное всеми студентами на решение задач ($180 \text{ мин} \cdot 5 = 900 \text{ мин}$) и суммарное количество решенных ими за экзамен задач ($7,5 + 6 + 4,5 + 4 + 3 = 25$), мы можем определить средние затраты времени на решение одной задачи группой студентов (при условии, что студенты решают задачи самостоятельно) по формуле простой средней арифметической:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 T_i}{\sum_{i=1}^5 x_i} = \frac{180 \cdot 5}{7,5 + 6 + 4,5 + 4 + 3} = \frac{900}{25} = 36.$$

Т.е. в среднем студенты группы тратят на решение одной задачи 36 минут. Перепишем данную формулу используя только исходные данные задачи (т.е. только T_i и x_i)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 T_i}{\sum_{i=1}^5 q_i} = \frac{\sum_{i=1}^5 T_i}{\sum_{i=1}^5 \frac{T_i}{x_i}} = \frac{180 \cdot 5}{\frac{180}{24} + \frac{180}{30} + \frac{180}{40} + \frac{180}{45} + \frac{180}{60}} = \frac{900}{25} = 36.$$

Обратим внимание, что это формула расчета средней гармонической взвешенной, где $T = k$, а $q = f$.

Таким образом, используя формулу средней гармонической взвешенной и только исходные данные (только T_i и x_i , не вычисляя дополнительно количество задач решаемых за экзамен каждым студентом (q_i)) мы могли бы сразу вычислить искомую величину – сколько времени в среднем тратят все студенты группы на решение одной задачи. Кроме того, если мы сократим в данной формуле параметр T_i (т.к. продолжительность экзамена у всех студентов одинакова и равна 180 мин), то получим:

$$\bar{X} = \frac{180 \cdot 5}{\frac{180}{24} + \frac{180}{30} + \frac{180}{40} + \frac{180}{45} + \frac{180}{60}} = \frac{5}{\frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60}} = \frac{5}{\sum_{i=1}^5 \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = 36.$$

А это в свою очередь формула средней гармонической простой.

Задача 10.6.

Даны объемы производства предприятия А за 5 лет.

Период (год)	Объем производства в тыс. тонн
2001	45
2002	58,5
2003	70,2
2004	77,22
2005	88,803

Найти средний темп роста объемов производства предприятия за рассматриваемый период.

Решение.

Обозначим темп роста объема производства i_n (это наш осредняемый признак, наше x_i), n – рассматриваемый период. i_n определяется как отношение текущего объема выпуска к уровню выпуска предыдущего года.

Тогда, темп роста объема производства предприятия А за первый период (с 2001 по 2002 год) составит $i_1 = 58,5/45 = 1,3$;

за второй – $i_2 = 70,2/58,5 = 1,2$;

за третий – $i_3 = 77,27/70,2 = 1,1$;

за последний четвертый период – $i_4 = 80,803/77,22 = 1,15$.

Если обозначить объем производства в начальный период времени (2001) – q_0 , а объем производства в конечный период (2005) – q_n , то $q_n = q_0 \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4$.

Для нахождения среднего значения темпа роста за рассматриваемый период (обозначим его $\bar{i}$) заменим в вышеприведенной формуле индивидуальные значения показателей темпов роста (i_1, i_2, i_3, i_4) средним ($\bar{i}$), это даст соотношение $q_n = q_0 \cdot \bar{i} \cdot \bar{i} \cdot \bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{i}^4$. Т.е. предположим, что если объем производства ежегодно прирастает (изменяется) с одинаковым темпом роста $\bar{i}$, то через 4 периода предприятие с объема производства q_0 выйдет на уровень производства q_n . Тогда $\bar{i}$ (искомое $\bar{X}$) определяется соотношением:

$$\bar{i} = \left(\frac{q_n}{q_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4}.$$

Обратим внимание, что это формула расчета средней геометрической простой, где $\bar{i} = \bar{X}, i_i = x_i$.

Для данных задачи

$$\bar{i} = \left(\frac{q_4}{q_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4} = \left(\frac{88,803}{45}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1,3 \cdot 1,2 \cdot 1,1 \cdot 1,15} = \sqrt[4]{1,9734} = 1,185.$$

Задача 10.7.

На основании данных по двум операторам мобильной связи необходимо определить, у кого из них и насколько выше средний, за рассматриваемый период, темп роста стоимости минуты разговора (звонки на номера любого оператора, не пакетные тарифы).

Период (год)	Стоимость минуты разговора, руб.	
	Оператор мобильной связи А	Оператор мобильной связи Б
2011	1,00	0,64
2012	1,20	0,72
2013	1,08	0,81
2014	1,62	1,62

Решение.

Вычислим ежегодные темпы роста стоимости минуты разговора двух операторов. Как и в предыдущей задаче обозначим темп роста – i_n (это наш осредняемый признак, наше x_i). n – рассматриваемый период;

i_n определяется как отношение текущей стоимости минуты разговора к стоимости минуты разговора в предыдущем году. Результаты вычислений запишем в виде таблицы

Период (год)	Стоимость минуты разговора, руб.	
	Оператор мобильной связи А	Оператор мобильной связи Б
2011	-	-
2012	$i_1 = 1,2/1 = 1,2$	$i_1 = 0,72/0,64 = 1,125$
2013	$i_2 = 1,08/1,2 = 0,9$	$i_2 = 0,81/0,72 = 1,125$
2014	$i_3 = 1,62/1,08 = 1,5$	$i_3 = 1,62/0,81 = 2$

Средний за период 2011-2014 темп роста стоимости минуты разговора оператора А вычислим по формуле средней геометрической простой:

$$\bar{i} = \bar{X} = \sqrt[n]{\prod x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,5} = \sqrt[3]{1,62} = 1,174.$$

т.е. в среднем за три года стоимость минуты разговора ежегодно увеличивалась в 1,174 раза.

Для расчета среднего темпа роста оператора Б воспользуемся формулой средней геометрической взвешенной, т.к. среди ежегодных темпов роста присутствуют повторяющиеся значения (1,125):

$$\bar{i} = \bar{X} = \sqrt[\Sigma f]{\prod x^f} = \sqrt[\Sigma f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_n^{f_n}} = \sqrt[3]{i_1^2 \cdot i_3} = \sqrt[3]{1,125^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2,53125} = 1,363.$$

т.е. в среднем за три года стоимость минуты разговора ежегодно увеличивалась в 1,363 раза, что на 0,189 выше чем у оператора А. В результате стоимость минуты разговора двух операторов сравнивалась, в то время как в начале рассматриваемого периода данный показатель оператора Б был в 1,5625 раза ($1/0,64 = 1,5625$) меньше, чем у конкурента.

Задача 10.8.

По нижеприведенным данным найти среднюю урожайность чечевицы за рассматриваемый период:

Год	2014	2015	2016	2017	2018
Урожайность, в ц/га	98	76	106	116	129

Решение.

В данном случае у нас интервальный ряд с равными временными интервалами – годами (i). Показатель урожайности это Y_i , т.е. значение уровня ряда в соответствующем интервале (году i). В любой точке внутри изучаемого года значение признака принимается постоянным. Соответственно, средняя урожайность чечевицы за 5 рассматриваемых лет составила:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \frac{98 + 76 + 106 + 116 + 129}{5} = 105 \text{ ц/га.}$$

Задача 10.9.

По нижеприведенным данным найти средний размер ключевой ставки Банка России за 2018 г.:

период	01.01–11.02	12.02–25.03	26.03–16.09	17.09–31.12
размер ключевой ставки, в %	7,75	7,50	7,25	7,50

Решение.

В данном случае у нас интервальный ряд с неравными временными интервалами определяемыми количеством дней (t_i). Значение ключевой ставки это Y_i , т.е. значение уровня ряда в соответствующем интервале (например, с 01 января по 11 февраля). В любой точке внутри изучаемого интервала (t_i) значение ключевой ставки принимается постоянным. Соответственно, средняя величина ключевой ставки Банка России в 2018 году составила:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{7,75 \cdot 42 + 7,5 \cdot 42 + 7,25 \cdot 175 + 7,5 \cdot 106}{42 + 42 + 175 + 106} = \frac{2704,25}{365} = 7,41\%.$$

Задача 10.10.

Найти среднесписочную численность сотрудников предприятия за пять месяцев, если известна численность сотрудников на первое число каждого месяца с марта по август:

Показатель	март	апрель	май	июнь	июль	август
Численность сотрудников на 01 число месяца, чел.	769	1 729	676	512	429	299

Решение.

I способ. В данном случае у нас моментный временной ряд, где моментом «замера» показателя является первое число каждого месяца. Мы примем промежутки между датами (моментами) равными друг другу (не будем делать различия между продолжительностью месяца в 30 и 31 день). В данном временном ряду показатель на начало каждого периода одновременно является показателем на конец предыдущего периода. Например, на 01 марта численность сотрудников составила 769 чел., а на конец марта – 1 729 чел. Очевидно, что значение среднего показателя внутри каждого интервала зависит от того, как шло развитие в рамках интервалов, происходило это постепенно или скачкообразно. Мы этого не знаем. Принято предполагать, что в пределах каждого периода, разделяющего моментные наблюдения, развитие происходило по линейному закону. А значит, среднее значение показателя внутри каждого интервала может быть вычислено как полусумма значений на начало и конец данного интервала.

Например, в марте численность сотрудников в среднем была равна $(769 + 1\,729) / 2 = 1\,249$ чел.

Количество таких средних будет равно количеству интервалов между моментами «замера» показателя. В нашем случае 6 уровней ряда, интервалов между уровнями будет $6 - 1 = 5$.

Как результат, среднее значение показателя за все пять периодов можно вычислить как среднее арифметическое средних в каждом интервале.

Для нашего примера среднесписочная численность сотрудников предприятия за пять месяцев равна:

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \frac{\frac{769+1729}{2} + \frac{1729+676}{2} + \frac{676+512}{2} + \frac{512+429}{2} + \frac{429+299}{2}}{6-1} \\ &= \frac{1249 + 1202,5 + 594 + 470,5 + 364}{5} = 776 \text{ чел.}\end{aligned}$$

II способ. Если имеется моментный ряд, содержащий n уровней ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) с равными $(n - 1)$ интервалами между уровнями (моментами времени), то применяется формула для расчета среднего уровня ряда

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2}Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1} + \frac{1}{2}Y_n}{n-1},$$

называемая средней хронологической.

Тогда среднесписочная численность сотрудников предприятия за пять месяцев равна

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \frac{\frac{1}{2}Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + \frac{1}{2}Y_6}{5} = \frac{\frac{769}{2} + 1729 + 676 + 512 + 429 + \frac{299}{2}}{5} \\ &= 776 \text{ чел.}\end{aligned}$$

Заметим, что если имеется моментный ряд, содержащий n уровней ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) с неравными $(n - 1)$ интервалами между уровнями (моментами времени), то для расчета среднего уровня ряда предварительно вычисляют значения уровней ряда в серединах интервалов

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + Y_3}{2}, \dots, \bar{Y}_{n-1} = \frac{Y_{n-1} + Y_n}{2},$$

а затем вычисляется общий средний уровень ряда (как средняя арифметическая взвешенная):

$$\bar{Y} = \frac{\frac{Y_1+Y_2}{2} \cdot t_1 + \frac{Y_2+Y_3}{2} \cdot t_2 + \dots + \frac{Y_{n-1}+Y_n}{2} \cdot t_{n-1}}{t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \bar{Y}_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{n-1} t_i},$$

где t_i - время, в течение которого среднее значение интервала принимается постоянным.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.11.

На экзамене по предмету «математика» студентами были получены следующие баллы: 46, 49, 55, 63, 74, 76, 84, 87, 92, 94. Найти средний балл за экзамен по математике группы студентов.

Задача 10.12.

Используя данные о продаже билетов по направлению Москва – Екатеринбург

Тип билета	Количество проданных билетов, тыс. шт.	Средняя стоимость одного билета, руб.
Плацкарт	360	1 650
Купе	310	3 200
СВ	90	4 300

найти среднюю стоимость билета на данном направлении.

Задача 10.13.

Найти средний размер депозита в банке, если банк принимает к размещению следующие виды депозитов

Тип депозита	Средний размер депозита данного вида, в тыс. руб.	Всего в банке размещено депозитов данного вида, в шт.
Закрытый (без возможности пополнения и снятия)	902	45 200
С возможностью пополнения	390	38 700
С возможностью снятия	630	29 500
Открытый (с возможностью пополнения и снятия)	510	52 600

Задача 10.14.

Найти среднюю ставку банка по кредитному портфелю, используя данные о выданных банком кредитах

Вид кредита	Всего банком выдано кредитов данного вида, в млн. руб.	Средняя ставка по данному виду кредитов, в %
Потребительские кредиты	6 900	15,2
Автокредиты	25 000	12

Задача 10.15.

Предположим вы пытаетесь угадать сумму очков, выпадающих на двух игральных костях. У вас 10 попыток. В первой из них вы ошиблись на +4 (т.е. ваша догадка была на 4 очка больше, чем выпало на костях), во второй вы ошиблись на –7 (т.е. ваша догадка была на 7 очков меньше, чем выпало на костях), в третьей вы ошиблись на –6, в четвертой на +10, в пятой на +1, в шестой на –8, в седьмой на +3, в восьмой на –4, в девятой вы угадали, в десятой ошиблись на +7. Найти среднюю величину ошибку вашей догадки.

Задача 10.16.

В течение недели вы добираетесь до работы на одном и том же трамвае, что по расписанию пребывает на вашу остановку в 09:05. При этом, в понедельник трамвай приходит вовремя, во вторник опаздывает на 7 минут, в среду приходит раньше на 5 минут, в четверг задерживается на 3 минуты, в пятницу вновь пребывает раньше на 5 минут, в субботу трамвай приходит вовремя. Найти среднюю величину отклонения трамвая от расписания.

11. Аналитическая статистика

Показатели вариации и способы их расчета

Вариация – несовпадение (или различие) уровней одного и того же показателя у разных объектов.

Например, рост Володи 176 см, Ольги 164 см, Ивана 193 см. Т.е. показатель «рост» у разных людей отличается. И это отличие нам необходимо измерить, охарактеризовать силу вариации, ее величину.

Самая приблизительная оценка вариации может быть дана с помощью *размаха (амплитуды) вариации (R)*:

$$R = x_{max} - x_{min},$$

где x_{max} и x_{min} – наибольшее и наименьшее значения варьирующего признака.

Размах (амплитуда) вариации характеризует лишь максимальное различие значений признака, не учитывает вариацию между всеми значениями совокупности.

Более строгие показатели вариации – показатели колеблемости относительно среднего уровня признака. К ним относятся:

- среднее линейное отклонение;
- дисперсия;
- среднее квадратическое отклонение;
- коэффициент вариации.

Среднее линейное отклонение (a) – простейший показатель колеблемости относительно среднего уровня признака, вычисляется как среднее арифметическое значение абсолютных отклонений признака от его среднего уровня:

$$a = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n},$$

при повторяемости отдельных значений x_i используют формулу:

$$a = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum f_i},$$

где x_i – значение варьирующего признака в дискретном ряду или середина интервала в интервальном распределении;

f_i – частота варьирующего признака;

$\bar{x}$ – среднее значение варьирующего признака.

Среднее линейное отклонение просто вычислить, удобно интерпретировать, но трудно использовать в математической статистике. Так как модули нельзя поставить в соответствие с каким-либо вероятностным законом.

Потому, в статистике для измерения вариации чаще применяются среднее квадратическое отклонение (параметр нормального распределения) и показатель дисперсии.

Дисперсия признака (σ^2) определяется на основе квадратической степенной средней:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

при повторяемости отдельных значений x_i используют формулу:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}.$$

Показатель σ , равный $\sqrt{\sigma^2}$ (квадратному корню из дисперсии), называется *средним квадратическим отклонением*, и вычисляется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

при повторяемости отдельных значений x_i используют формулу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}},$$

Среднее квадратическое отклонение и среднее линейное отклонение показывают на сколько в среднем отклоняются конкретные варианты признака от его среднего значения.

Коэффициент вариации (V) – дает относительную оценку вариации, рассчитывается как отношение среднего квадратического отклонения к среднему значению признака. Или как отношение среднего линейного отклонения к медиане. Результат записывается в виде коэффициента или в процентах:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \left(\text{или } V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \right).$$

Задача 11.1.

По данным об объемах сбора урожая кукурузы (тыс. тонн) по 12 компаниям агрохолдинга

18	18	18	29	29	29
37	37	37	37	46	46

- 1) необходимо построить дискретный ряд распределения;
- 2) определить среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Решение.

1) Пусть x_i – значение признака (объем сбора урожая, в тыс. тонн), f_i – частота признака, тогда дискретный ряд распределения имеет вид:

x_i	f_i
18	3
29	3
37	4
46	2

2) среднее квадратическое отклонение (σ) определим по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}},$$

где $\bar{x}$ – среднее значение варьирующего признака.

$\bar{x}$ вычислим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}.$$

Расчеты удобно представить в таблице

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
18	3	$18 \cdot 3$	$(18 - 31,75)^2 \cdot 3 = 567,1875$
29	3	$29 \cdot 3$	$(29 - 31,75)^2 \cdot 3 = 22,6875$
37	4	$37 \cdot 4$	$(37 - 31,75)^2 \cdot 4 = 110,25$
46	2	$46 \cdot 2$	$(46 - 31,75)^2 \cdot 2 = 406,125$
Итого	$\sum f_i = 12$	$\sum x_i \cdot f_i = 381$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 1106,25$

$$\bar{x} = \frac{381}{12} = 31,75 \text{ (тыс. тонн)},$$

т.е. в среднем каждая из 12-ти агрокомпаний собирает 31,75 тыс. тонн кукурузы. Тогда среднее квадратическое отклонение составит

$$\sigma = \sqrt{\frac{1106,25}{12}} = 9,601 \text{ (тыс. тонн)}.$$

Коэффициент вариации определим по формуле

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

$$V = \frac{9,601}{31,75} = 0,302 \text{ или } 30,2\%.$$

Задача 11.2.

По данным об объемах производства продукции (тыс. тонн) по 14 компаниям холдинга

54	54	54	75	75	75	75
64	64	76	76	76	76	76

- 1) необходимо построить дискретный ряд распределения;
- 2) определить среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Решение.

1) Пусть x_i – значение признака (объем производства), f_i – частота признака тогда дискретный ряд распределения имеет вид

x_i	f_i
54	3
64	2
75	4
76	5

2) расчёты представим в таблице

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
54	3	$54 \cdot 3$	$(54 - 69,286)^2 \cdot 3 = 700,9592$
64	2	$64 \cdot 2$	$(64 - 69,286)^2 \cdot 2 = 55,8776$
75	4	$75 \cdot 4$	$(75 - 69,286)^2 \cdot 4 = 130,6122$
76	5	$76 \cdot 5$	$(76 - 69,286)^2 \cdot 5 = 225,4082$

Итого	$\sum f_i = 14$	$\sum x_i \cdot f_i = 970$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 1112,875$
-------	-----------------	----------------------------	---

$$\bar{x} = \frac{970}{14} = 69,29 \text{ (тыс. тонн),}$$

т.е. в среднем каждая из 14-ти компаний холдинга производит 69,29 тыс. тонн продукции. Тогда среднее квадратическое отклонение составит

$$\sigma = \sqrt{\frac{1112,875}{14}} = 8,916 \text{ (тыс. тонн).}$$

Коэффициент вариации определим по формуле

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

$$V = \frac{8,916}{69,29} = 0,129 \text{ или } 12,9\%.$$

Задачи для самостоятельного решения[9]

Задача 11.3.

По данным об объемах сбора урожая кукурузы (тыс. тонн) по 10 компаниям агрохолдинга:

5	5	5	12	12
18	18	18	18	18

- 1) необходимо построить дискретный ряд распределения;
- 2) определить среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Задача 11.4.

Имеется распределение рабочих трех цехов по разрядам:

Разряд	Количество рабочих, чел.		
	Литейный	Механический	Сборочный
1	50	20	40
2	100	80	60
3	150	150	200
4	350	300	400
5	200	150	250
6	150	100	150
Итого	1000	800	1100

Определите:

- 1) Средний разряд и дисперсию по каждому из цехов;
- 2) Средний разряд по трем цехам вместе.

Задача 11.5.

Имеются данные по 20 индивидуальным частным предприятиям очисленности работающих и месячном фонде оплаты труда:

Занимающиеся торгово-закупочной деятельностью			Оказывающие услуги предприятиям и населению		
№	Численность работающих, чел.	Фонд оплаты труда, тыс. руб.	№	Численность работающих, чел.	Фонд оплаты труда, тыс. руб.

1.	4	7,8	11.	1	2,4
2.	3	10,2	12.	2	6,3
3.	5	23,7	13.	4	9,6
4.	3	4,8	14.	2	13,8
5.	10	15,6	15.	6	17,7
6.	3	6,3	16.	4	6,6
7.	6	7,2	17.	7	9,3
8.	4	7,8	18.	2	12,6
9.	6	9,0	19.	9	24,0
10.	2	9,6	20.	2	5,1

Для каждой группы предприятий отдельно рассчитайте среднее арифметическое значение, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации по показателю оплаты труда одного работающего. Какая группа предприятий более однородна по данному показателю?

Задача 11.6.

По данным обследования домашних хозяйств города получено следующее распределение среднедушевых доходов:

Группы семей по уровню среднедушевого дохода, руб.	Количество членов семей, чел.
Менее 500	15
500 – 1000	125
1000 – 1500	185
1500 – 2000	130
2000 – 2500	70
2500 – 3000	35
3000 – 3500	20
3500 – 4000	10
4000 – 4500	5
4500 – 5000	3
5000 и более	2
Итого	600

Рассчитайте среднее квадратическое отклонение и показатель вариации.

Проверочная работа №4

Вариант 1

Задача 1.

Используя данные о продаже билетов по направлению Екатеринбург – Санкт-Петербург

Тип билета	Выручка от продажи билетов, млн руб.	Средняя стоимость одного билета, руб.
Плацкарт	399	2 375
Купе	450	3 600
СВ	66	4 400

Найти среднюю стоимость билета на данном направлении.

Задача 2.

Банк в течение дня трижды менял курс продажи евро. По данным об объеме продаж евро (в рублевом эквиваленте) и о курсе продажи евро найти средний за день курс продажи евро в банке

Объем продаж евро, в руб.	Курс продажи евро, руб. за 1 евро
2 035 175	63,5
839 680	65,6
1 790 845	66,5

Задача 3.

По данным об объемах производства продукции (тыс. тонн) по 8 компаниям холдинга:

10	10	10	12
8	8	8	12

- 1) необходимо построить дискретный ряд распределения;
- 2) определить среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Вариант 2**Задача 1.**

Найти средний размер депозита в банке, если банк принимает к размещению следующие виды депозитов

Тип депозита	Средний размер депозита данного вида, в тыс. руб.	Всего в банке размещено депозитов данного вида на общую сумму, в тыс. руб.
Закрытый (без возможности пополнения и снятия)	905	6 516 000
С возможностью пополнения	420	1 671 600
С возможностью снятия	740	2 146 000
Открытый (с возможностью пополнения и снятия)	810	5 950 260

Задача 2.

Найти среднюю производительность труда на одного рабочего по трем цехам предприятия вместе, если по каждому из цехов известна стоимость выпущенной продукции и средняя производительность труда из расчета на одного рабочего

Цех	Стоимость выпущенной продукции, тыс. руб.	Средняя производительность труда одного рабочего, тыс. руб.
1	2 760	24
2	2 016	19,2
3	6 939	27

Задача 3.

По данным об объемах сбора урожая кукурузы (тыс. тонн) по 10 компаниям агрохолдинга:

5	5	10	10	10
12	12	12	12	12

- 1) необходимо построить дискретный ряд распределения;
- 2) определить среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Ответы к заданиям

Платежи по процентам. Вклады и кредит

4.15.

Год	Остаток долга на начало года (руб.)	Проценты (7%) (руб.)	Платеж по долгу (руб.)	Общий платеж (руб.)	Остаток долга на конец года (руб.)
1	500 000	35 000	50 000	85 000	450 000
2	450 000	31 500	50 000	81 500	400 000
3	400 000	28 000	50 000	78 000	350 000
4	350 000	24 500	50 000	74 500	300 000
5	300 000	21 000	50 000	71 000	250 000
6	250 000	17 500	50 000	67 500	200 000
7	200 000	14 000	50 000	64 000	150 000
8	150 000	10 500	50 000	60 500	100 000
9	100 000	7 000	50 000	57 000	50 000
10	50 000	3 500	50 000	53 500	0

4.16.

Полугодие	Остаток долга на начало периода (руб.)	Проценты (4,5%) (руб.)	Платеж по долгу (руб.)	Общий платеж (руб.)	Остаток долга на конец периода (руб.)
1	1 725 000	77 250	123 214,29	200 464,29	1 601 785,71
2	1 601 785,71	72 080,33	123 214,29	195 294,62	1 478 571,43
3	1 478 571,43	66 532,71	123 214,29	189 746,99	1 355 357,14
4	1 355 357,14	60 000,57	123 214,29	183 214,86	1 232 142,86
5	1 232 142,86	55 442,93	123 214,29	178 657,22	1 108 928,57
6	1 108 928,57	49 903,78	123 214,29	173 118,07	985 714,29
7	985 714,29	44 357,14	123 214,29	167 571,43	862 500,00
8	862 500,00	38 812,50	123 214,29	162 026,79	739 285,71
9	739 285,71	33 261,86	123 214,29	156 476,14	616 071,43
10	616 071,43	27 722,21	123 214,29	150 936,50	492 857,14
11	492 857,14	22 171,57	123 214,29	145 385,86	369 642,86
12	369 642,86	16 258,93	123 214,29	139 473,21	246 428,57

Пол уго дие	Остаток долга на начало периода (руб.)	Проценты (4,5%) (руб.)	Платеж по долгу (руб.)	Общий платеж (руб.)	Остаток долга на конец периода (руб.)
13	246 428,57	11 090,29	123 214,29	134 304,57	123 214,29
14	123 214,29	5 547,64	123 214,29	128 761,93	0

4.17.

Год	Остаток долга на начало года (руб.)	Проценты (7%) (руб.)	Платеж (руб.)	Погашение основного долга (руб.)	Остаток долга на конец года (руб.)
1	500 000	35 000	71 000	36 000	464 000
2	464 000	32 480	71 000	38 520	425 480
3	425 480	29 783,60	71 000	41 216,40	384 263,60
4	384 263,60	26 897,45	71 000	44 102,55	340 161,05
5	340 161,05	23 011,28	71 000	47 988,72	292 172,33
6	292 172,33	20 452,06	71 000	50 547,94	241 624,39
7	241 624,39	16 913,71	71 000	54 086,29	187 538,10
8	187 538,10	13 147,67	71 000	57 852,33	129 685,77
9	129 685,77	9 077,00	71 000	61 923,00	67 762,77
10	67 762,77	4 753,39	71 000	66 246,61	1 516,16

4.18.

Пол уго дие	Остаток долга на начало периода (руб.)	Проценты (4,5%) (руб.)	Платеж (руб.)	Погашение основного долга (руб.)	Остаток долга на конец периода (руб.)
1	1 725 000	77 250	179 400	102 150	1 622 850
2	1 622 850	72 103,25	179 400	107 296,75	1 515 553,25
3	1 515 553,25	68 193,89	179 400	111 206,11	1 404 347,14
4	1 404 347,14	63 194,12	179 400	116 205,88	1 288 141,26
5	1 288 141,26	57 973,96	179 400	121 426,04	1 166 715,22
6	1 166 715,22	52 503,18	179 400	126 896,82	1 039 818,40
7	1 039 818,40	46 791,83	179 400	132 608,17	907 210,23
8	907 210,23	40 824,96	179 400	138 575,04	768 635,19

Пол уго дие	Остаток долга на начало периода (руб.)	Проценты (4,5%) (руб.)	Платеж (руб.)	Погашение основного долга (руб.)	Остаток долга на конец периода (руб.)
9	768 635,19	34 086,58	179 400	145 313,42	623 321,77
10	623 321,77	28 050,79	179 400	151 349,21	471 972,56
11	471 972,56	21 238,26	179 400	158 161,74	313 810,82
12	313 810,82	14 631,49	179 400	164 768,51	149 042,31
13	149 042,31	6 706,90	179 400	172 693,10	-23 650,79
14	-23 650,79	-1 064,29	179 400	180 464,29	0

4.19.

Вариант 1 (Продление вклада): Накопление 7320000 рублей через 5 лет – недостаточно для покупки автомобиля.

Вариант 2 (Вклад «Пополняй»): Накопление 14375729 рублей через 5 лет – достаточно для покупки автомобиля без кредита.

Вариант 3 (Первый взнос и кредит): Переплата 3413000 рублей, общая сумма выплат 10008000 рублей – менее выгодно.

Вариант 4 (Депозит для снижения кредита): Переплата 1880700 рублей, общая сумма выплат 5496000 рублей – более выгодно, чем вариант 3, но все же не так выгодно, как вариант 2.

Наилучший вариант для Аркадия – Вариант 2 со вкладом «Пополняй», так как он позволяет накопить достаточно средств для покупки автомобиля без необходимости в кредите. Вариант 4 также может быть рассмотрен, если Аркадий решит взять кредит, так как он значительно снизит переплату.

Оптимизация процессов

5.11. 170 тонн.

5.12. На 1-й дом 15 человек и 11 человек на 2-й дом. Суточные затраты составят 1252 денежных единиц.

5.13. Наибольшее количество продукции (2198 единиц) будет выпущено, если на первом заводе будут трудиться 26 рабочих, на втором заводе – 13 рабочих, на третьем заводе – 1 рабочий.

5.14. Распределение по бригадам 5 и 19 человек, заработная плата 461 у.е.

5.15. Наилучшая цена 1500 руб. Наибольший возможный доход 2,25млн руб.

5.16. $p = 13$ тыс.руб.

Альтернативные издержки

6.5. При поступлении в магистратуру Иванов понесет следующие издержки:

Прямые денежные затраты: 844 000 руб.

Упущенный доход: 750 000 руб.

Общие издержки за два года: 1 594 000 руб.

Ежегодно (в течение 10 месяцев учебного времени) стоимость его решения составляет 797 000 руб., включая как прямые затраты, так и упущенные возможности заработка. Это означает, что каждый месяц обучения (с учетом каникул) обходится Иванову примерно в 66 417 руб. ($797\,000 : 12$).

6.6. Точки КПВ:

(0 фарфор, 300 стекло)

(40 фарфор, 200 стекло)

(100 фарфор, 100 стекло)

(140 фарфор, 0 стекло)

Вывод:

Завод 2 имеет абсолютное преимущество в производстве обоих товаров

Завод 1 имеет сравнительное преимущество в производстве фарфора

Завод 2 имеет сравнительное преимущество в производстве стекла

Для построения КПВ на графике нужно соединить точки:

$(0,300) \rightarrow (40,200) \rightarrow (100,100) \rightarrow (140,0)$

Это будет ломаная линия, показывающая все возможные комбинации производства стекла и фарфора при полном использовании ресурсов обоих заводов.

6.7. При выборе кемпинга в Подмосковье студент понес следующие издержки:

Прямые затраты: 5 000 руб.

Упущенный доход (альтернативные издержки): 10 000 руб.

Итоговые издержки: 15 000 руб.

Это означает, что выбор кемпинга обошелся студенту в 15 000 руб. дороже, чем наилучший альтернативный вариант (экспедиция в Крым), учитывая как прямые затраты, так и упущенную выгоду от неполученного дохода.

6.8. Альтернативные издержки вашего решения пройти онлайн-курс по инвестированию составляют 9 600 рублей - именно столько вы могли бы заработать, если бы в это время работали рекламным агентом.

Это означает, что каждый час обучения на курсе стоит вам 300 рублей упущенного дохода. При этом вы экономите на стоимости самого курса, так как он бесплатный.

6.9. Собственник несет экономические издержки в размере 105 000 рублей ежемесячно, из которых:

15 000 руб. - реальные денежные расходы на коммунальные услуги

90 000 руб. - упущенная выгода от неиспользования имущества для получения арендной платы

За год экономические издержки составляют 1 260 000 рублей, где основная часть (85.71%) приходится на упущенную выгоду от неиспользования квартиры как источника дохода.

Это означает, что каждый месяц собственник «платит» 105 000 рублей за право жить в собственной квартире, учитывая как реальные расходы, так и упущенную выгоду от неполучения арендной платы.

6.10. При текущих расходах (20 000 руб.) приобретение скидки выгодно.

Минимальная сумма покупок для окупаемости скидки составляет 9 900 руб. при условии сохранения расходов на невключаемые в скидку категории на уровне 5 000 руб.

6.11. Выгоднее выбрать категорию «Супермаркеты» с начислением 1% бонусов, так как при ежемесячных расходах в 35 000 руб. это принесет на 600 рублей больше бонусов в год по сравнению с категорией «Транспорт» (5% от 6 000 руб. в месяц).

Годовая разница в бонусах составит:

Супермаркеты: 4 200 руб.

Транспорт: 3 600 руб.

Таким образом, выбор категории «Супермаркеты» обеспечит получение на 16,7% больше бонусов по сравнению с категорией «Транспорт».

6.12. С чисто экономической точки зрения Саше не стоит пропускать занятие ради подработки, так как это приведет к чистым убыткам в размере 500 рублей.

6.13. Вывод по учебнику: Рациональному потребителю Паше стоит отправиться за учебником в другой магазин, так как:

Он сэкономит 200 рублей

Получит тот же товар дешевле

Несмотря на потерю времени, финансовая выгода очевидна

Случай 2: Покупка смартфона

Начальная цена: 18 000 руб.

Цена со скидкой: 17 500 руб.

Экономия: 500 руб.

Стоимость такси: 400 руб.

Чистая выгода: $500 - 400 = 100$ руб.

Вывод по смартфону: В этом случае решение менее очевидно:

Финансовая выгода минимальна (100 руб.)

Приходится учитывать:

Стоимость времени.

Утомляемость от дополнительной поездки.

Риск опоздания на семинар.

6.14. Минимальная процентная ставка должна быть равна отношению стоимости урожая к сумме займа (1000 руб.), умноженному на 100%.

Кривая производственных возможностей

7.3. Точки КПВ:

- Точка (0 игрушек, 6 тортов): Ольга работает только над тортами;
- Точка (4 игрушки, 0 тортов): Ольга работает только над игрушками;
- Промежуточные точки показывают альтернативные комбинации.

Особенности КПВ:

- Линия имеет отрицательный наклон;
- Выпуклая форма из-за разной производительности труда;

- Невозможность производства выше данной линии при 8-часовом рабочем дне.

Экономический смысл:

- Каждая игрушка «стоит» 1,5 торта (альтернативные издержки);
- При увеличении производства игрушек приходится жертвовать большим количеством тортов.

Вывод:

КПВ показывает все возможные комбинации производства тортов и игрушек при полном использовании 8-часового рабочего дня. Ольга может выбрать любую точку на этой кривой в зависимости от своих предпочтений, учитывая, что шитье игрушек для нее имеет дополнительную немонетарную ценность.

При этом, несмотря на одинаковую цену и издержки, альтернативные издержки производства одной игрушки составляют 1,5 торта, что отражает разницу в производительности Ольги в этих видах деятельности.

Спрос и предложение. Рыночное равновесие

8.5. Равновесная цена: 50 руб./шт. Равновесный объем: 600 шт.

8.6. На рынке возникнет дефицит, так как:

- Потребители готовы платить 60 руб./шт.
- Производители согласны продавать за 30 руб./шт.
- При текущей ситуации объем спроса превышает объем предложения
- Рыночная цена находится ниже равновесной, что создает стимул для роста цен

Размер дефицита составит: 560 (Q предложения) - 560 (Q спроса) = 0 шт. (но при разных ценах).

Это означает, что при текущих условиях рынок находится в состоянии неравновесия, и для достижения баланса необходимо повышение цены со стороны производителей.

8.7. Равновесная цена: 266 руб./шт. Равновесный объем: 117 шт.

8.8. Равновесная цена: 266 руб./шт. Равновесный объем: 117 шт.

Производство и издержки. Выручка. Прибыль

9.6. Прибыль фирмы составляет 5 150 000 рублей в год.

9.7. Годовая выручка фирмы составляет 15 000 000 рублей.

9.8. Бухгалтерская прибыль фирмы составляет 70 000 рублей.

9.9. Экономическая прибыль фирмы составляет 670 000 рублей.

9.10. Бухгалтерская прибыль = 400 ден. ед. Экономическая прибыль = 250 ден. ед.

9.11. Прибыль равна 100 000 руб.

9.12.

Q	P	TR	TC	π
30	60	1800	1500	300

9.13.

Q	P	TR	TC	π
50	60	3000	2500	500

9.14.

Q	P	TR	TC	π
20	90	1800	1800	0

9.15. Бухгалтерская прибыль составляет 1 636 000 рублей. Экономическая прибыль составляет 240 000 рублей.

9.16. Экономическая прибыль составляет 136 126 рублей.

Поскольку экономическая прибыль положительная, инженеру не стоит возвращаться на завод. Его текущее предприятие приносит прибыль даже с учетом упущенных возможностей (альтернативных издержек). Бизнес является экономически эффективным, так как превышает альтернативные варианты использования ресурсов владельца.

9.17. Экономическая прибыль отрицательная (-90 300 руб.), что говорит о том, что предложение работы аудитором в международной компании более выгодно. Собственное дело не покрывает альтернативные издержки владельца, то есть другие варианты использования ресурсов были бы более прибыльными.

9.18. Бухгалтерская прибыль составляет 70 000 рублей. Экономическая прибыль составляет -350 000 рублей.

9.19.

	1 год	2 год	3 год
Q	20	40	70
P	21,71	38	30
TR	1350	1520	2100
FC	300	300	300
VC	800	1000	1700
TC	1100	1300	2000
π	250	220	100

9.20.

	1 год	2 год	3 год
Q	33	32	50
P	30	40	16,4
TR	990	1280	820
FC	100	100	100
VC	1000	900	600
TC	1100	1000	700
π	100	280	120

9.21. Чистая прибыль предприятия составляет -1 010 000 рублей в месяц (убыток).

9.22. Для получения прибыли в размере 4 000 000 руб. фабрика должна продавать каждый диван по цене 37 500 рублей.

9.23. Точка безубыточности для компании «Стрела» составляет 1000 телевизоров.

9.24. Для достижения целевой прибыли в 6 000000 руб. фабрике необходимо реализовать 11000 рулонов обоев в год.

9.25. Вариант 1: 610 тортов.

Вариант 2: 600 тортов.

Вариант 3: 590 тортов.

Наиболее оптимальным вариантом аренды является вариант 3 с ежемесячным платежом 40000 руб., так как для достижения целевой прибыли необходимо продать наименьшее количество тортов (590 штук). Это значит, что предприниматель сможет быстрее достичь своей цели и снизить риски.

9.26. Бухгалтерская прибыль: 2 227 500 руб. Экономическая прибыль: 2107500 руб.

9.27.

1. Для химического предприятия:

- Выгоднее производить серу с прибылью 9 500000 руб.
- Производство селитры убыточно.

2. Для завода по производству самокатов:

- Производство самокатов убыточно с убытком 2000000 руб.
- Для достижения безубыточности необходимо производить 12000 самокатов в год.

9.28.

- Дополнительная прибыль от заказа: 1 500000 руб.
- Компания «Гамма» должна согласиться на заказ, так как он принесет дополнительную прибыль.
- Компания должна отказаться от заказа, если цена за сервис ниже 3500 руб.

9.29. Переменные затраты на одну пачку бумаги составляют 25 руб.

Описательная статистика

10.11. Средний балл за экзамен по математике группы студентов составляет 72.

10.12. Средняя стоимость билета на направлении Москва – Екатеринбург составляет примерно 2 600 рублей.

10.13. Средний размер депозита в банке составляет примерно 609.76 тыс. руб.

10.14. Средняя ставка банка по кредитному портфелю составляет примерно 12,69%.

10.15. Средняя величина ошибки вашей догадки равна 5,83.

10.16. Средняя величина отклонения трамвая от расписания равна 4,24 минуты.

Аналитическая статистика

11.3. Дискретный ряд распределения:

1 тыс. тонн: 1 раз
5 тыс. тонн: 3 раза
12 тыс. тонн: 2 раза
18 тыс. тонн: 5 раз

Среднее квадратическое отклонение (σ): примерно 6,375. Коэффициент вариации (CV): примерно 53,94%.

11.4.1) По литейному цеху: средний разряд 3, дисперсия 2,9. По механическому цеху: средний разряд 4, дисперсия 1,375. По сборочному цеху: средний разряд 3,636, дисперсия 1,727.

2) Средний разряд по всем цехам: 3,517. Общая дисперсия: 2,034.

11.5. Группа 1: Торгово-закупочная деятельность

Среднее арифметическое (M): 2,36 руб.

Среднее квадратическое отклонение (σ): 1,237 руб.

Коэффициент вариации (CV): 52,4%

Группа 2: Услуги предприятиям и населению

Среднее арифметическое (M): 3,075 руб.

Среднее квадратическое отклонение (σ): 1,77 руб.

Коэффициент вариации (CV): 57,6%.

1 группа предприятий более однородна по данному показателю.

11.6. Среднее квадратическое отклонение (σ): примерно 825,74 руб.

Показатель вариации (CV): примерно 82,57%.

Проверочная работа 1

Вариант 1

Задача 1. Сумма кредита, взятая в банке, составляет примерно 4.55 млн рублей.

Задача 2. 1300 тысяч рублей.

Задача 3. 805 тысяч рублей.

Вариант 2

Задача 1. 950400 рублей.

Задача 2. 1,5 млн рублей.

Задача 3. 384000 рублей.

Проверочная работа 2

Вариант 1

Задача 1. Строительство завода окупится за 5 лет.

Задача 2. 5800000 рублей

Задача 3. Наименьшее значение p , при котором суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб. через три года, равно 9 тыс. руб.

Вариант 2

Задача 1. Строительство завода окупится на протяжении 4 лет.

Задача 2. Наибольшее количество единиц товара, которое можно произвести за неделю на этих двух заводах, составляет 40 000 единиц.

Задача 3. Наименьшее значение p , при котором суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей за 4 года, составляет 8 тыс. рублей за единицу продукции.

Проверочная работа 3

Вариант 1

Задача 1. У подруги больше стимулов пойти на выставку, несмотря на плохую погоду. Это явление объясняется психологией безвозвратных затрат (sunkcostfallacy).

Задача 2. Они смогут справиться с заданием, если Лиза напечатает 10 страниц текста, а Кристина сделает 12 слайдов.

Задача 3. Бухгалтерская прибыль: 1283 000 руб. Экономическая прибыль: - 13000 руб. Это означает, что Петрова получает положительную бухгалтерскую прибыль, но экономическая прибыль отрицательна, что указывает на то, что в долгосрочной перспективе её бизнес может не покрывать все альтернативные затраты.

Задача 4. Экономическая прибыль Сидорова составляет 328 000 руб.

Задача 5. Равновесная цена составляет 308.

Задача 6. Так как спрос (25 шт.) превышает предложение (20 шт.), на рынке будет дефицит в количестве 5 шт.

Вариант 2

Задача 1. Если переводчик обучал бы сына самостоятельно, он мог бы заработать 46,875 руб. за 15 часов работы, но он потратит 75 000 руб. на репетитора. Таким образом, финансово ему невыгодно нанимать репетитора, поскольку он тратит больше, чем мог бы заработать, обучая своего сына сам.

Задача 2. Выпускнику следует выбрать первый вариант – стабильную работу с графиком 5/2 и зарплатой 40000 рублей. Несмотря на меньшую зарплату, большее количество свободного времени и более высокая ценность этого времени (из-за преобладания работы над отдыхом) приводят к более высокому индексу счастья (412800 у.е. против 302108 у.е.).

Задача 3. Бухгалтерская прибыль: 4720 000 руб. Экономическая прибыль: 400 000 руб. Таким образом, Иванов получает значительную бухгалтерскую прибыль, но его экономическая прибыль, учитывающая все альтернативные издержки, составляет 400 000 руб.

Задача 4. Экономическая прибыль: 837500 руб. Предпринимателю стоит продолжать свое дело, так как оно приносит ему значительную экономическую прибыль.

Задача 5. Равновесная цена составляет 308.

Задача 6. На рынке будет дефицит в 10 шт. изделий.

Проверочная работа 4

Вариант 1

Задача 1. Средняя стоимость билета на направлении Екатеринбург–Санкт-Петербург составляет примерно 2971,17руб.

Задача 2. Средний курс продажи евро в банке за день составляет примерно 64,92 руб. за 1евро.

Задача 3. Дискретный ряд распределения:

8 тыс.тонн: 3 компании

10 тыс. тонн: 3 компании

12 тыс.тонн: 2 компании

Среднеекватрическое отклонение: $\approx 1,56$ тыс. тонн. Коэффициент вариации: $\approx 16,00\%$.

Вариант 2

Задача 1. Средний размер депозита в банке составляет примерно 759,55 тыс.руб.

Задача 2. Средняя производительность труда на одного рабочего по трем цехам предприятия составляет примерно 24,55 тыс.руб.

Задача 3. Дискретный ряд распределения:

1 тыс.тонн: 1 компания

5 тыс.тонн: 2 компании

10 тыс.тонн: 3 компании

12 тыс.тонн: 5 компаний

Среднеекватрическое отклонение: примерно 3,91 тыс. тонн. Коэффициент вариации: примерно 38,7%.

Используемая литература

1. Фомин Г.П., Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г.П. Фомин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М. – 2009. – 640 с.: ил.
2. Фомин Г.П., Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г.П. Фомин. – М.: Издательство Юрайт, 2013. – 462 с.
3. Алексенцев Юрий Михайлович Математический портал Mathm [<https://www.mathm.ru/index.html>]. - Москва: [б.н.], 2024 г.
4. Гушин Дмитрий Дмитриевич [В Интернете]. - 2024 г. - 09 Июль 2024 г. - <https://math-ege.sdangia.ru/?redir=1>
5. Школково Каталог заданий по ЕГЭ - Математика [В Интернете] // Школково. - 2023 г.. - 08 Июль 2024 г. - <https://3.shkolково.online/catalog?SubjectId=1>
6. Практикум по решению экономических задач [Электронный ресурс]: методическое пособие для учителей общеобразовательных организаций А. А. Егорова, Е. В. Кузнецова, Д. И. Никитин Челябинск: ЧИППКРО, 2017. 52 с.
7. О.С. Кеткина, Статистика: сборник заданий с примерами решений и пояснениями. Учебное электронное текстовое издание. Екатеринбург, 2019. 79 с. - [https://study.urfu.ru/Aid/Publication/13874/1/%D0%AD%D0%9E%D0%A0_%D0%9A%D0%B5%D1%82%D0%BA%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20\(%D0%B1%D0%B5%D0%B7%20%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B2%D1%8B%D1%85\).pdf](https://study.urfu.ru/Aid/Publication/13874/1/%D0%AD%D0%9E%D0%A0_%D0%9A%D0%B5%D1%82%D0%BA%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20(%D0%B1%D0%B5%D0%B7%20%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B2%D1%8B%D1%85).pdf)
8. Сборник практических задач и упражнений по экономике (для студентов неэкономических специальностей) / Н.П. Кононкова, А.А. Костанян, Д.А. Михайленко [и др.]; под ред. Н.П. Кононковой. – М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023. –216 с.
9. Завьялов Ф.Н., Спиридонова Е.М. Сборник задач и упражнений по теории статистики / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2001 120 с.